Combined Arabic Translation Drafts

Li Ye, Qin Jiushao, Sunzi, and al-Khwarizmi

Modern LaTeX Editions of Public-Domain Mathematics Manuscripts

---

測圓海鏡

مرآة البحر لقياس الدائرة

Ceyuan Haijing —Sea Mirror of Circle Measurements

卷一—卷三

المجلد الأول —المجلد الثالث

Volumes I –III

元　李冶　撰

لِـ يِـه (لي جِـه)، 1192–1279 م

(Li Ye / Li Zhi, 1192–1279 CE)

以天元術解勾股容圓一百七十問

حلّ مئة وسؤالٍ وسبعين مسألة في الدائرة المحاطة بالمثلث القائم
السماء عنصر بطريقة

Using the Method of the Celestial Element (Tian Yuan Shu)
to Solve 170 Problems on the Inscribed Circle

باستخدام طريقة عنصر السماء لحلّ 170 مسألة في الدائرة المحاطة

A foundational text of medieval Chinese algebra,
completed in the year 1248 of the Common Era.

أحد النصوص الأساسية في جبر العصور الوسطى الصينية،
ميلادية 1248 سنة في أُنجز

Bilingual Chinese–Arabic Edition / □□□□□□□□–□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□

1 Introduction / مقدمة

The *Ceyuan Haijing* (測圓海鏡, literally “Sea Mirror of Circle Measurements”) is the masterpiece of Li Ye (李冶, also known as Li Zhi, 1192–1279), one of the four great mathematicians of the Song–Yuan period of China, alongside Yang Hui, Qin Jiushao, and Zhu Shijie.

Completed in 1248, this work systematically applies the **tian yuan shu** (天元術, “method of the celestial element”)—an algebraic method for setting up and solving polynomial equations—to a total of 170 geometric problems concerning a circle inscribed in or related to a right triangle (勾股容圓).

The book is organized as follows:

- **Volume 1** establishes the theoretical foundation: the *Circle City Diagram*)圓城圖式,(the *General Rate Names*)總率名號,(the *Current Question Numbers*)今問正數,(and the *Identification Miscellaneous Records*)識別雜記(containing 692 geometric formulas.
- **Volumes 12--2** present 170 problems, solved by the tian yuan shu method. The problems involve equations of degrees ranging from 1 to .6

The present document contains the complete text of **Volumes 3--1**, comprising all foundational material and the first suite of problems.

يعتبر كتاب «مرآة البحر لقياس الدائرة» (測圓海鏡) تحفة الرياضياتي لي يه (李冶 ، المعروف أيضًا باسم لي جيه، 1192–1279 م)، أحد العُظماء الأربعة في الرياضيات خلال فترة سونغ–يوان في الصين، إلى جانب يانغ هُوي وتشين جيُوشاو وتشو شِجيه.

أُنجز هذا العمل في سنة 1248 م، ويطبّق بشكل منهجي **طريقة عنصر السماء** (天元術) —وهي طريقة جبرية لوضع وحلّ المعادلات متعدّدة الحدود —على 170 مسألة هندسية تتعلق بدائرة محاطة بمثلث قائم أو مرتبطة به (勾股容圓).

يُنظَّم الكتاب على النحو التالي:

- **المجلد الأول**: يضع الأسس النظرية: رسمة □□□□□□□□□ □□□□□□□□ (圓城圖式)، و□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□ (總率名號)، و□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□ (今問正數)، و□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□ (識別雜記) التي تحتوي على 692 صيغة هندسية.
- **المجلدات 2–12**: تعرض 170 مسألة، تُحلّ بطريقة عنصر السماء، وتشمل معادلات درجتها من الدرجة الأولى إلى السادسة.

يحتوي هذا الكتاب على النص الكامل للمجلدات **1–3**، بما فيها جميع المواد الأساسية وأول مجموعة من المسائل.

2 Original Preface / المدمة الأصلية

數本難窮，吾欲以力強窮之，彼其數不惟不能得其凡，而吾之力且憊矣。然則數果不可以窮耶？既已名之數矣，則又何為而不可窮也。

故謂數為難窮斯可，謂數為不可窮斯不可。何則？彼其冥冥之中，固有昭昭者存，夫昭昭者其自然之數也。非自然之數，其自然之理也。數一出於自然，吾欲以力強窮之，使隸首復生亦末如之何也已。

苟能推自然之理，以明自然之數，則雖遠而乾端坤倪，幽而神情鬼狀，未有不合者矣。

予自幼喜算數，恆病夫考圓之術例出於牽強，殊乖於自然，如古率、徽率、密率之不同，截弧、截矢、截背之互見，內外諸角，析剖支條，莫不各自名家，與世作法。及反覆研究，卒無以當吾心焉。

老大以來，得洞淵九容之說，日夕玩繹，而向之病我者，使爆然落去而無遺余。山中多暇，客有從余求其說者，於是乎又為衍之，遂累一百七十問。

既成編，客復目之《測圓海鏡》，蓋取夫天臨海鏡之義也。

昔半山老人集《唐百家詩選》，自謂廢日力於此，良可惜。明道先生以上蔡謝君記誦為玩物喪志。夫文史尚矣，猶之為不足貴，況九九賤技能乎！

嗜好酸鹹，平生每痛自戒勅，竟莫能已，類有物憑之者，吾亦不知其然而然也。

故嘗私為之解曰：由技兼於事者言之，夷之禮，夔之樂，亦不免為一技。由技進乎道者言之，石之斤，扁之輪，非聖人之所與乎。

覽吾之編，察吾苦心，其憫我者當百數，其笑我者當千數。乃若吾之所自得，則自得焉耳，寧復為人憫笑計哉。

李冶序

أصل الأعداد يصعب استنفاده، ولو حاولتُ إجباره بالقوة، لما استطعتُ الحصول على جوهره، بل وستنضب قواي. فهل الأعداد لا تُستنفد حقًّا؟ بما أنها سُمّيت «أعدادًا»، فكيف لا يمكن استنفادها؟

فمن الجائز القول إنّ الأعداد يصعب استنفادها، لكن لا يجوز القول إنها لا تُستنفد. ولماذا؟ ففي وسط الظلام يوجد نورٌ باطن، وهذا النور هو العدد الطبيعي. بل هو ليس العدد الطبيعي وحسب، بل هو المبدأ الطبيعي. بما أن الأعداد تنبثق من الطبيعة، فلو حاولتُ إجبارها بالقوة، حتى لو بُعث لي شو (مخترع الحساب الأسطوري) من جديد، لعجز عن الأمر.

فإذا أمكن استنباط المبادئ الطبيعية لإيضاح الأعداد الطبيعية، فحتى أقاصي السماء وأطراف الأرض، وحتى أسرار الأرواح والأشباح، لن يخلوا من التوافق.

منذ صغري أحببتُ الحساب، وكنتُ أشكو دومًا أنّ طرق دراسة الدائرة تبدو مُكرهة وغير طبيعية —فالنسب القديمة والنسب الدقيقة والنسب المُحكَمة تختلف، والأقواس والأوتار والظهور تتباين، والزوايا الداخلية والخارجية تُحلّل إلى فروع. كلّ مدرسة وضعت اسمها وطريقتها للعالم. غير أنّ دراستها المتكرّرة لم تُشبع فضولي.

في الكبر، حصلتُ على نظرية «تسعة استيعابات دونغ يوان» (洞淵九容)، وقد تأمّلتُها ليل نهار، فزال ما كان يؤلمني دفعةً واحدةً بلا أثر. وإذ كانت لديّ فراغاتٌ في الجبال، طلب منّي ضيوفي شرح هذه النظرية، فوسّعتُها حتى بلغت مئة وسبعين مسألة.

ولما اكتمل التأليف، أطلق عليه أحد الضيوف اسم «مرآة البحر لقياس الدائرة»، مستوحىً من معنى «السماء التي تُشرف على مرآة البحر».

لقد جمع «شيخ نصف الجبل» مختاراتٍ من شعر مئة شاعرٍ من تانغ، معتبرًا ذلك إضاعةً للوقت. وقد زمَر مستر مينغداو بشي شيه من شانغتساي لحفظه الشعر. وإذا كان الأدب والتاريخ —رغم علوّ شأنهما— لا يُعَدّان ثمينَين، فكيف بمهارة الضرب «تسعة في تسعة» الهزيلة!

إنّ حبّ الملح والخل، فقد حاولتُ طوال حياتي توبيخ نفسي والامتناع عنها، لكنني عجزتُ، كأنّ شيئًا ما يدفعني، ولا أدري كيف يحصل هذا.

ولذا فسّرتُ ذلك لنفسي: من جهة تطبيق المهارات، فإنّ طقوس يي وموسيقى كويي لا تخلوا من كونها مهارة. ومن جهة الارتقاء بالمهارة إلى الطريق، فإنّ فأس بن شي وعجلة بيان —أليس هما مما يُثنى عليه الحكماء؟

من يطالع تأليفي ويلمس جهدي، سيجد من يشفق عليّ بالمئات، ومن يسخروا مني بالألوف. أمّا ما اكتسبته لنفسي فهو لي وحدي، وهل أبالي بمن يشفق أو يسخر؟

تقديم لي يه

3 Volume 1 / المجلد الأول 卷一

Volume 1 is the theoretical foundation of the entire work. It comprises four major sections:

1. **Circle City Diagram** (圓城圖式) — the master geometric configuration
2. **General Rate Names** (總率名號) — definitions of all 15 right triangles and their elements
3. **Current Question Numbers** (今問正數) — numerical values for all line segments
4. **Identification Miscellaneous Records** (識別雜記) — 692 geometric formulas

المجلد الأول هو الأساس النظري للعمل بأكمله. ويتألّف من أربعة أقسام رئيسية:

1. **رسمة المدينة الدائرية** (圓城圖式) —التكوين الهندسي الرئيسي
2. **أسماء المعدّلات العامة** (總率名號) —تعريف المثلثات القائمة الخمسة عشر وعناصرها
3. **أعداد المسائل الحاضرة** (今問正數) —القيم الرقمية لجميع الخطوط
4. **سجلات التمييز المتنوعة** (識別雜記) —692 صيغة هندسية

3.1 Circle City Diagram / رسمة المدينة الدائرية (圓城圖式)

The *Circle City Diagram* is the master geometric configuration upon which all 170 problems are based. It consists of a large right triangle (called 勾股形, "leg–leg shape") with its inscribed circle, together with specific points and lines.

The scenario Li Ye constructs is:

> 假令有圓城一所，不知周徑，四面開門，門外縱橫各有十字大道。其西北十字道頭定為乾地，其東北十字道頭定為艮地，其東南十字道頭定為巽地，其西南十字道頭定為坤地。所有測望雜法——設問如後。

The 22 Named Points. The largest right triangle has vertices **Tian** (天, Heaven), **Di** (地, Earth), and **Qian** (乾). The center of the inscribed circle is called **Xin** (心, Heart). Key points include intersections of horizontal and vertical lines through the center and other constructed lines. Each point is designated by a single Chinese character:

天	地	乾	心	日	南	北	川
東	西	艮	坤	山	月	巽	青
泉	朱	金	泛	旦	夕		

إنّ □□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□ هي التكوين الهندسي الرئيسي الذي تستند إليه جميع المسائل الـ170. وتتألّف من مثلث قائم كبير (يُسمّى 勾股形 ، «شكل الضلع–الضلع») مع دائرته المحاطة، بالإضافة إلى نقاط وخطوط مُحدّدة.

والمنطق الذي بناه لي يه هو:

> لنفترض مدينة دائرية محيطها وقطرها مجهولان، لها أبواب على الجوانب الأربعة، وخارج كلّ باب طرقات متقاطعة شمالية–جنوبية وشرقية–غربية. الطرقات المتقاطعة الشمالية–الغربية تُسمّى «تشيين» (乾)، والشمالية–الشرقية «كين» (艮)، والجنوبية–الشرقية «شون» (巽)، والجنوبية–الغربية «كون» (坤). جميع طرق القياس مفصّلة في المسائل أدناه.

النقاط الثانية والعشرون المُسمّاة. المثلث القائم الأكبر له رؤوس **تيان** (天 ، السماء)، و**دي** (地 ، الأرض)، و**تشيين** (乾). ويُسمّى مركز الدائرة المحاطة **شين** (心 ، القلب). وتشمل النقاط الرئيسية تقاطعات الخطوط الأفقية والعمودية عبر المركز وخطوط أخرى مُنشأة. كلّ نقطة تُحدّد بحرفٍ صينيّ واحد:

天	地	乾	心	日	南	北	川
東	西	艮	坤	山	月	巽	青
泉	朱	金	泛	旦	夕		

3.2 General Rate Names / أسماء المعدّلات العامة (總率名號)

The work studies **15 right triangles**, all having a segment of the *Tiandi* (天地) line as their hypotenuse (弦, "string"). The *General Rate Names* define these

يدرس هذا الكتاب **15 مثلثًا قائمًا**، جميعها يتخذ قطعةً من خط □□□□□□ (天地) وترًا له (弦 ، «الوتر»). وتحدّد □□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□ هذه المثلثات وأضلاعها الثلاثة.

triangles and their three sides.

In each triangle:

- **弦** (c) — the hypotenuse (斜邊)
- **股** (b) — the longer vertical leg
- **勾** (a) — the shorter horizontal leg

في كلّ مثلث:

- **الوتر** (c) —الوتر (弦)
- **الضلع الطويل** (b) —الضلع الرأسي الأطول (股)
- **الضلع القصير** (a) —الضلع الأفقي الأقصر (勾)

No.	Name / الاسم	弦 الوتر	股 الضلع	勾 القاعدة
1	通 تونغ (العام)	通弦	通股	通勾
2	邊 بيان (الجانب)	邊弦	邊股	邊勾
3	底 دي (القاعدة)	底弦	底股	底勾
4	黃廣 هوانغ غوانغ	黃廣弦	黃廣股	黃廣勾
5	黃長 هوانغ تشانغ	黃長弦	黃長股	黃長勾
6	上高 شانغ غاو (العلوي)	上高弦	上高股	上高勾
7	下高 شيا غاو (السفلي)	下高弦	下高股	下高勾
8	上平 شانغ بينغ	上平弦	上平股	上平勾
9	下平 شيا بينغ	下平弦	下平股	下平勾
10	大差 دا تشا (الكبير)	大差弦	大差股	大差勾
11	小差 شياو تشا (الصغير)	小差弦	小差股	小差勾
12	皇極 هوانغ جي (القصوي)	皇極弦	皇極股	皇極勾
13	太虛 تاي شُو (الخالص)	太虛弦	太虛股	太虛勾
14	明 مينغ (الضوء)	明弦	明股	明勾
15	叀 تشوان (التركيز)	叀弦	叀股	叀勾

Note: 上高 = 下高 and 上平 = 下平, so among 15 triangles, only 13 are distinct.

ملاحظة: 上高 = 下高 و 上平 = 下平 ، لذا من بين 15 مثلثًا، هناك 13 مثلثًا مميزًا فقط.

3.3 Current Question Numbers / أعداد المسائل الحاضرة (今問正數)

This section gives the numerical value of every line segment in the diagram. The **radius of the inscribed circle is taken as 120 steps** (步), which serves as the standard unit.

يعطي هذا القسم القيمة الرقمية لكلّ قطعة خط في الرسمة. **يُؤخذ نصف قطر الدائرة المحاطة بوحدة 120 خطوة** (步)، وهي تُستخدم كوحدة قياس معيارية.

1. 通 (Tong / General)

弦六百八十　勾三百二十　股六百
勾股和九百二十　較二百八十
勾和一千　較三百六十
股和一千二百八十　較八十
較和九百六十　較四百
和和一千六百　較二百四十

That is: hypotenuse $c = 680$, short leg $a = 320$, long leg $b = 600$.

1. تونغ (العام)

القاعدة 320	الضلع 600	الوتر 680
	الفرق 280	مجموع القاعدة والضلع 920
	الفرق 360	مجموع القاعدة 1000
	الفرق 80	مجموع الضلع 1280
	الفرق 400	مجموع الفرق 960
	الفرق 240	المجموع الكلي 1600

أي: الوتر $c = 680$، القاعدة $a = 320$، الضلع $b = 600$.

2. 邊 (Bian / Side)

2. بيان (الجانب)

弦五百四十四	勾二百五十六	股四百八十	544 الوتر	480 الضلع	256 القاعدة
勾股和七百三十六	較二百二十四		736 مجموع القاعدة والضلع	224 الفرق	
勾和八百	較二百八十八		800 مجموع القاعدة	288 الفرق	
股和一千零二十四	較六十四		1024 مجموع الضلع	64 الفرق	
較和七百六十八	較三百二十		768 مجموع الفرق	320 الفرق	
和和一千二百八十	較一百九十二		1280 المجموع الكلي	192 الفرق	

3. 底 (Di / Base)

3. دي (القاعدة)

弦四百二十五	勾二百	股三百七十五	425 الوتر	375 الضلع	200 القاعدة
勾股和五百七十五	較一百七十五		575 مجموع القاعدة والضلع	175 الفرق	
勾和六百二十五	較二百二十五		625 مجموع القاعدة	225 الفرق	
股和八百	較五十		800 مجموع الضلع	50 الفرق	
較和六百	較二百五十		600 مجموع الفرق	250 الفرق	
和和一千	較一百五十		1000 المجموع الكلي	150 الفرق	

4. 黃廣 (Huang Guang)

4. هوانغ غوانغ

弦五百一十	勾二百四十	股四百五十	510 الوتر	450 الضلع	240 القاعدة
(即城徑也 — this is the city diameter)			(هذا هو قطر المدينة)		
勾股和六百九十	較二百一十		690 مجموع القاعدة والضلع	210 الفرق	

The remaining 11 triangles follow the same pattern, each with 13 numerical quantities, giving a total of $15 \times 13 = 195$ numerical entries.

تتبع المثلثات الـ11 المتبقية النمط نفسه، ولكلّ منها 13 كمية رقمية، ما يعطي إجمالاً $15 \times 13 = 195$ مدخلاً رقميًا.

3.4 Identification Miscellaneous Records / سجلات التمييز المتنوعة (識別雜記)

This is the theoretical heart of the work. It contains **692 geometric formulas** relating the various line segments in the diagram. These formulas are purely geometric theorems, independent of any particular numerical values. The problems in all subsequent volumes are solved by using these formulas together with the tian yuan shu.

The section is divided into eight parts:

1. **Various Names** (諸雜名目) — general definitions and 30+ theorems
2. **Five Sums and Five Differences** (五和五較)
3. **Various Hypotenuses** (諸弦)
4. **Large and Small Differences** (大小差)
5. **Various Differences** (諸差)
6. **Mutual Relations of Rates** (諸率互見)
7. **Four-Place Supplement** (四位拾遺)
8. **Supplement** (拾遺)

هذا هو القلب النظري للعمل. ويحتوي على **692 صيغة هندسية** تربط الخطوط المختلفة في الرسمة. هذه الصيغ هي مبرهنات هندسية خالصة، مستقلة عن أي قيم رقمية مُعيّنة. وتُحلّ مسائل المجلدات التالية باستخدام هذه الصيغ معاً مع طريقة عنصر السماء.

يُقسّم هذا القسم إلى ثمانية أجزاء:

1. **الأسماء المتنوعة** (目名雜諸) — تعريفات عامة وأكثر من 30 مبرهنة
2. **المجاميع الخمسة والفروق الخمسة** (較五和五)
3. **الأوتار المختلفة** (弦諸)
4. **الفروق الكبيرة والصغيرة** (差小大)
5. **الفروق المختلفة** (差諸)
6. **العلاقات المتبادلة للمعدّلات** (見互率諸)
7. **التكميلة الرباعية** (遺拾位四)
8. **التكميلة** (遺拾)

Sample Definitions from 諸雜名目 / نماذج تعريفات من «الأسماء المتنوعة»:

Name	Definition	التعريف
内率	明勾 × 叀股	القاعدة المضيئة × ضلع التركيز
外率	明股 × 叀勾	ضلع المضيء × قاعدة التركيز
虚率	虚勾 × 虚股	القاعدة الخالصة × الضلع الخالص
角差	高股 − 平勾	ضلع المرتفع − قاعدة المستوي
次差	(明股 − 明勾) + (叀股 − 叀勾)	(ضلع المضيء−قاعدته) + (ضلع التركيز−قاعدته)
混同和	黄長股 + 黄廣勾	ضلع هوانغ تشانغ + قاعدة هوانغ غوانغ
傍差	(明股 − 明勾) − (叀股 − 叀勾)	(ضلع المضيء−قاعدته) − (ضلع التركيز−قاعدته)

Sample Theorems / نماذج من المبرهنات:

- 凡大差小差相乘為半段徑冪。

  The product of the large difference and small difference equals half the square of the diameter.

- 大差勾小差股相乘同上。

  The product of the large-difference short-leg and the small-difference long-leg equals the same.

- 黃廣股黃長勾相乘為經冪。

- إنّ حاصل ضرب الفرق الكبير والفرق الصغير يساوي نصف مربّع القطر.
- حاصل ضرب قاعدة الفرق الكبير وضلع الفرق الصغير يساوي المقدار نفسه.
- حاصل ضرب ضلع هوانغ غوانغ وقاعدة هوانغ تشانغ يساوي مربّع القطر.
- مجموع الضلعين القائمين يساوي مجموع الوتر وقطر الدائرة المحاطة.

  أي: $a + b = c + d$، حيث d هو قطر الدائرة المحاطة.

The product of the Huangguang long-leg and Huangchang short-leg equals the square of the diameter.

- 勾股和即弦黄和。

  The sum of the two legs equals the sum of the hypotenuse and the diameter of the inscribed circle.

  That is: $a + b = c + d$, where d is the diameter.

4 Volume 2 / المجلد الثاني 卷二

正率一十四問 — Fourteen Questions on Standard Rates

These fourteen problems form the "Dongyuan Nine Containments" (洞淵九容) sequence, derived from the earlier work of the Daoist master Li Sicong (李思聰, known as "Master Dongyuan"). They present the nine fundamental types of circles contained in or related to a right triangle, plus five additional problems.

أربعة عشر مسألة في المعدّلات المعيارية

تُشكّل هذه المسائل الأربعة عشر سلسلة «تسعة استيعابات دونغ يوان» (洞淵九容)، المستوحاة من عمل السيّد الطاووي لي سِتسونغ (李思聰 ، المعروف باسم «سيّد دونغ يوان»). وهي تعرض تسعة أنواع أساسية من الدوائر المحاطة بالمثلث القائم أو المرتبطة به، بالإضافة إلى خمس مسائل إضافية.

Problem 1 / المسألة الأولى 第一問

或問：甲乙二人俱在乾地，乙東行三百二十步而立，甲南行六百步望見乙，問徑幾里?

答 城徑二百四十步。

法曰 此為勾股容圓也。以勾股相乘，倍之為實，並勾股冪以求弦，復加入勾股共，以為法。

草曰 置甲南行六百步在地，以乙東行三百二十步乘之，得一十九萬二千步，倍之得三十入萬四千步為實。以乙東行步自之，得一十萬零二千四百步為勾冪；以甲南行步自之，得三十六萬步為股冪。二冪相並，得四十六萬二千四百步為方實，以平方開之，得六百八十步，則弦也。以弦加勾股共，共得一千六百步以為法。如法而一，得二百四十步，則城徑也。合問。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع تشيين. يسير ب نحو الشرق 320 خطوة ويقف، ويسير أ نحو الجنوب 600 خطوة ويرى ب. فكم قطر المدينة؟

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: الضلعين اضرب القائم. بالمثلث المحاطة الدائرة مسألة هذه لاستخراج الضلعين مربّعي واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين القاسية. فتكون الضلعين مجموع أضف ثم الوتر،

الحل: سير بمسافة واضربها خطوة) (600 الجنوب نحو أ سير مسافة ضع واضعفها خطوة، 192000 على تحصل خطوة)، (320 الشرق نحو ب نحو ب سير مسافة ربّع الذات. وهي خطوة 384000 على فتحصل أ سير مسافة ربّع القاعدة؛ مربّع وهي 102400 على فتحصل الشرق المربّعين اجمع الضلع. مربّع وهي 360000 على فتحصل الجنوب نحو التربيعي الجذر واستخرج المربّعة، الذات وهي 462400 على فتحصل الضلعين، مجموع إلى الوتر أضف الوتر. وهي خطوة 680 على فتحصل القاسية على الذات اقسم القاسية. وهو خطوة 1600 المجموع يصبح المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر وهي خطوة 240 على فتحصل

Problem 2 / المسألة الثانية 第二問

或問：甲乙二人俱在西門，乙東行二百五十六步，甲南行四百八十步望見乙，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為勾上容圓也。以勾股相乘，倍之為實，並勾股冪以求弦，加入股以為法。

草曰 置甲南行四百八十步在地，以乙東行二百五十六步乘之，得一十二萬二千八百八十步，倍之得二十四萬五千七百六十步為實。以乙東行步自之，得六萬五千五百三十六步為勾冪；以甲南行步自之，得二十三萬零四百步為股冪。勾股冪相並，得二十九萬五千九百三十六步為方實，以平方開之，得五百四十四步為弦也。以弦加入南行步，共得一千零二十四步以為法。而一，得二百四十步則城徑。合問。

سُئل: رجلان أ وب يقفان عند الباب الغربي. يسير ب نحو الشرق 256 خطوة، ويسير أ نحو الجنوب 480 خطوة ويرى ب. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: الضلعين اضرب القاعدة. على المحاطة الدائرة مسألة هذه لاستخراج الضلعين مربّعي واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين القاسية. فتكون الضلع أضف ثم الوتر،

الحل: سير بمسافة واضربها خطوة) (480 الجنوب نحو أ سير مسافة ضع واضعفها خطوة، 122880 على تحصل خطوة)، (256 الشرق نحو ب نحو ب سير مسافة ربّع الذات. وهي خطوة 245760 على فتحصل أ سير مسافة ربّع القاعدة؛ مربّع وهي 65536 على فتحصل الشرق مربّعي اجمع الضلع. مربّع وهي 230400 على فتحصل الجنوب نحو الجذر واستخرج المربّعة، الذات وهي 295936 على فتحصل الضلعين مسافة إلى الوتر أضف الوتر. وهي خطوة 544 على فتحصل التربيعي اقسم القاسية. وهو خطوة 1024 المجموع يصبح الجنوب، نحو السير يتطابق المدينة. قطر وهي خطوة 240 على فتحصل القاسية على الذات

المطلوب. مع

Problem 3 / المسألة الثالثة 第三問

或問：甲乙二人俱在北門，乙東行二百步而止，甲南行三百七十五步望見乙，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為股上容圓也。以勾股相乘，倍之為實，以勾股冪求弦，加入勾以為法。

草曰 置甲南行三百七十五步，以乙東行二百步乘之，得七萬五千步，倍之得一十五萬步為實。以乙東行自之，得四萬步為勾冪；以甲南行自之，得一十四萬零六百二十五步為股冪。勾股冪相並，得一十八萬零六百二十五步為方實。如平方而一，得四百二十五步則弦也。加入乙東行二百步，共得六百二十五步以為法。以法除之，得二百四十步，則城徑也。合問。

سُئل: رجلان أ وب يقفان عند الباب الشمالي. يسير ب نحو الشرق 200 خطوة ويقف، ويسير أ نحو الجنوب 375 خطوة ويرى ب. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: الضلعين اضرب الضلع. على المحاطة الدائرة مسألة هذه الضلعين، مربّعي من الوتر واستخرج الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين القاسية. فتكون القاعدة أضف ثم

الحل: سير بمسافة واضربها خطوة) (375 الجنوب نحو أ سير مسافة ضع واضعفها خطوة، 75000 على تحصل خطوة)، (200 الشرق نحو ب نحو ب سير مسافة ربّع الذات. وهي خطوة 150000 على فتحصل أ سير مسافة ربّع القاعدة؛ مربّع وهي 40000 على فتحصل الشرق مربّعي اجمع الضلع. مربّع وهي 140625 على فتحصل الجنوب نحو الجذر استخرج المربّعة. الذات وهي 180625 على فتحصل الضلعين نحو ب سير مسافة أضف الوتر. وهي خطوة 425 على فتحصل التربيعي اقسم القاسية. وهو خطوة 625 المجموع يصبح خطوة)، (200 الشرق يتطابق المدينة. قطر وهي خطوة 240 على فتحصل القاسية على الذات المطلوب. مع

Problem 4 / المسألة الرابعة 第四問

或問：甲乙二人俱在圓城中心而立，乙穿城向東行一百三十六步而止，甲穿城南行二百五十五步望見乙，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為勾股上容圓也。以勾股相乘，倍之為實，並勾股冪如法求弦，以為法。

草曰 以二行步相乘，得三萬四千六百八十步，倍之得六萬九千三百六十步為實。置乙東行自之，得一萬八千四百九十六步為勾冪；又以甲南行自之，得六萬五千零二十五步為股冪。二冪相並，得八萬三千五百二十一步為方實，以平方開之，得二百八十九步即弦也。便以為法。如法除實，得二百四十步，即圓城之徑也。合問。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في مركز المدينة الدائرية. يعبر ب المدينة ويسير نحو الشرق 136 خطوة ويقف، ويعبر أ المدينة ويسير نحو الجنوب 255 خطوة ويرى ب. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: اضرب والضلع. القاعدة على المحاطة الدائرة مسألة هذه لاستخراج الضلعين مربّعي واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف المسافتين القاسية. فتكون الوتر

الحل: فتحصل واضعفها خطوة، 34680 على فتحصل المسافتين اضرب فتحصل الشرق نحو ب سير مسافة ربّع الذات. وهي خطوة 69360 على فتحصل الجنوب نحو أ سير مسافة ربّع القاعدة؛ مربّع وهي 18496 على 83521 على فتحصل المربّعين اجمع الضلع. مربّع وهي 65025 على خطوة 289 على فتحصل التربيعي الجذر واستخرج المربّعة، الذات وهي 240 على فتحصل القاسية على الذات اقسم القاسية. وهي الوتر. وهي المطلوب. مع يتطابق الدائرية. المدينة قطر وهي خطوة

Problem 5 / المسألة الخامسة 第五問

或問：甲乙二人同立於乾地，乙東行一百八十步遇塔而止，甲南行三百六十步，回望其塔正居城徑之半，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為弦上容圓也。以勾股相乘，倍之為實，

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع تشيين. يسير ب نحو الشرق 180 خطوة حتى يصل البرج ويقف، ويسير أ نحو الجنوب 360 خطوة، وعندما ينظر إلى الوراء يرى البرج عند منتصف قطر المدينة. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: القائمين الضلعين اضرب الوتر. على المحاطة الدائرة مسألة هذه

以勾股和為法。

草曰 以二行步相乘，得六萬四千八百步，倍之得一十二萬九千六百步為實。並二行步，得五百四十步以為法。除實，得二百四十步，即城徑也。合問。

القاسية. فتكون القائمين الضلعين واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف

الحل: فتحصل واضعفها خطوة، 64800 على فتحصل المسافتين اضرب 540 على فتحصل المسافتين اجمع الذات. وهي خطوة 129600 على خطوة 240 على فتحصل القاسية على الذات اقسم القاسية. وهي خطوة المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر وهي

Problem 6 / المسألة السادسة 第六問

或問：甲乙二人俱在坤地，乙東行一百九十二步而止，甲南行三百六十步，望乙與城參相直，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為勾外容圓也。以勾股相乘，倍之為實，以弦較和為法。

草曰 以二行步相乘，得六萬九千一百二十步，倍之得一十三萬八千二百四十步為實。置乙東行自之，得三萬六千八百六十四步為勾冪；又置甲南行自之，得一十二萬九千六百步為股冪。二冪相並，得一十六萬六千四百六十四步為方實，以平方開之，得四百零八，即弦也。又置甲南行步內減乙東行步，餘一百六十八步，即較也。以較加弦，共得五百七十六步以為法。實如法而一，得二百四十步，為城徑也。合問。

〔按〕此題用勾股求得弦，即可加減得弦較較為城徑。今必以勾股相乘倍積為實，求得弦較和為法，而後始得弦較較為城徑者，蓋欲因此並明勾股相乘之倍積為弦較較、弦較和相乘之積，非故為紆回也。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع كون. يسير ب نحو الشرق 192 خطوة ويقف، ويسير أ نحو الجنوب 360 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: الضلعين اضرب القاعدة. خارج المحاطة الدائرة مسألة هذه القاسية. فتكون والفرق الوتر واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين

الحل: فتحصل واضعفها خطوة، 69120 على فتحصل المسافتين اضرب الشرق نحو ب سير مسافة ربّع الذات. وهي خطوة 138240 على الجنوب نحو أ سير مسافة ربّع القاعدة؛ مربّع وهي 36864 على فتحصل فتحصل المربّعين اجمع الضلع. مربّع وهي 129600 على فتحصل فتحصل التربيعي الجذر واستخرج المربّعة، الذات وهي 166464 على مسافة من الشرق نحو ب سير مسافة اطرح ثم الوتر. وهو 408 على إلى الفرق أضف الفرق. وهي خطوة 168 يتبقّى الجنوب، نحو أ سير القاسية على الذات اقسم القاسية. وهو خطوة 576 المجموع يصبح الوتر، المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر وهي خطوة 240 على فتحصل

〔تعليق〕 ثم القائمين الضلعين من الوتر استخراج يمكن المسألة، هذه في استخدام يجب أنّه غير المدينة. قطر على للحصول والطرح الجمع إجراء والفرق الوتر ومجموع كذات، القائمين الضلعين ضرب حاصل ضعف توضيح هو ذلك من والغرض المدينة. قطر على الحصول ثم كقاسية، (الوتر ضرب حاصل يساوي القائمين الضلعين ضرب حاصل ضعف أنّ التعقيد. مجرد وليس الفرق)، زائد و(الوتر الفرق) ناقص

Problem 7 / المسألة السابعة 第七問

或問：甲乙二人同立於艮地，甲南行一百五十步而止，乙東行八十步，望乙與城參相直，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為股外容圓也。以勾股相乘，倍之為實，以弦和較為法。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع كِن. يسير أ نحو الجنوب 150 خطوة ويقف، ويسير ب نحو الشرق 80 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: الضلعين اضرب الضلع. خارج المحاطة الدائرة مسألة هذه والضلع الوتر مجموع فرق واجعل الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين القاسية.

Problem 8 / المسألة الثامنة 第八問

或問：甲乙二人同立於坤地，甲南行一百九十二步而止，乙東行七十二步，望乙與城參相直，問答同前。

答 城徑二百四十步。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع كون. يسير أ نحو الجنوب 192 خطوة ويقف، ويسير ب نحو الشرق 72 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

法曰 此為弦外容圓也。以勾股相乘，倍之為實，以勾股較為法。

الطريقة: الضلعين اضرب الوتر. خارج المحاطة الدائرة مسألة هذه القاسية. الضلعين فرق واجعل الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين

Problem 9 / المسألة التاسعة 第九問

或問：甲乙二人俱在巽地，乙東行一百九十二步而止，甲南行三百六十步，望乙與城參相直，問答同前。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع شون. يسير ب نحو الشرق 192 خطوة ويقف، ويسير أ نحو الجنوب 360 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

答 城徑二百四十步。

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

法曰 此為勾外容半圓也。以勾股相乘，倍之為實，以股弦和為法。

الطريقة: اضرب القاعدة. خارج المحاطة الدائرة نصف مسألة هذه والوتر الضلع واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين الضلعين القاسية. فتكون

Problem 10 / المسألة العاشرة 第十問

或問：甲乙二人俱在艮地，甲南行一百五十步而止，乙東行八十步，望乙與城參相直，問答同前。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع كِن. يسير أ نحو الجنوب 150 خطوة ويقف، ويسير ب نحو الشرق 80 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

答 城徑二百四十步。

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

法曰 此為股外容半圓也。以勾股相乘，倍之為實，以勾弦和為法。

الطريقة: اضرب الضلع. خارج المحاطة الدائرة نصف مسألة هذه والوتر القاعدة واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين الضلعين القاسية. فتكون

The above ten problems constitute the "Dongyuan Nine Containments" (洞淵九容), supplemented by Problem 5 (弦上容圓). The remaining four problems of Volume 2 continue with additional standard-rate problems using the tian yuan shu method.

تُشكّل المسائل العشرة أعلاه «تسعة استيعابات دونغ يوان» (洞淵九容)، بالإضافة إلى المسألة الخامسة (الدائرة المحاطة على الوتر). وتستمر المسائل الأربع المتبقية في المجلد الثاني بمسائل إضافية في المعدّلات المعيارية باستخدام طريقة عنصر السماء.

5 Volume 3 / المجلد الثالث 卷三

邊股一十七問 — Seventeen Questions on the Side-Long-Leg

Volume 3 presents 17 problems in which the given data involve the *side long-leg* (邊股, b_2), defined as the long leg of the "Side" triangle (邊 triangle, No. 2 in the table), equal to 480 steps. In all problems of this volume, the unknown to be found is the diameter of the circular city (城徑 = 240 steps).

These problems demonstrate the increasing sophistication of the tian yuan shu method, with equations ranging from quadratic to cubic degree.

سبع عشرة مسألة في الضلع الجانبي

يعرض المجلد الثالث 17 مسألة تتضمّن البيانات المعطاة الضلع الطويل الجانبي (邊股 ، b_2)، المعرَّف بأنه الضلع الطويل للمثلث الجانبي (邊 ، رقم 2 في الجدول)، وهو يساوي 480 خطوة. وفي جميع مسائل هذا المجلد، المجهول المطلوب إيجاده هو قطر المدينة الدائرية (城徑 = 240 خطوة).

توضّح هذه المسائل التطوّر المتزايد في طريقة عنصر السماء، حيث تتراوح المعادلات من الدرجة الثانية إلى الدرجة الثالثة.

Problem 1 / المسألة الأولى 第一問

或問：乙出東門南行，不知步數而止。甲出西門南行四百八十步，望見乙，復就乙行五百一十步與乙相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 倍相減步，以乘二之甲南行步，為平方實，得城徑。

草曰 識別得二行相減，餘三十步，即乙出東門南行步也。倍相減步，得六十步，以乘二之甲南行步九百六十步，得五萬七千六百步，為平方實。如法開之，得二百四十步，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب مسافة مجهولة ويقف. يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة، ويرى ب، ثم يسير نحو ب 510 خطوة حتى يلتقي به. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: أ سير مسافة بضعف واضربه المسافتين، بين الفرق اضعف المدينة. قطر على وتحصل التربيع، ذات فتكون الجنوب، نحو

الحل: ب سير مسافة وهي خطوة، 30 يتبقّى المسافتين، نطرح بالتمييز: خطوة، 60 على فنحصل الفرق نضعف الجنوب. نحو الشرقي الباب من على فنحصل خطوة)، (960 الجنوب نحو أ سير مسافة بضعف ونضربها 240 على فنحصل الجذر نستخرج التربيع. ذات وهي خطوة 57600 المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر وهي خطوة

Problem 2 / المسألة الثانية 第二問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙從艮隅東行八十步，望見甲，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 倍南行步，以東行步乘之為實，東行步為從方，一步常法，得全徑。

草曰 立天元一為全徑，以減於二之甲南行步，得為兩個大差也。以乙東行步乘之，得為圓徑冪，寄左。然後以天元冪與左相消，得以帶縱平方開之，得二百四十步，即城徑也。合問。

又法： 半之乙東行步，乘南行步為實，半之乙東行步為從，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半城徑，減甲南行步，得為大差也。以半之東行步乘之，得即半徑冪，寄左。然後以天元冪為同數，與左相消，得開帶縱平方，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يسير ب من زاوية كِن نحو الشرق 80 خطوة، ويرى أ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: نحو السير بمسافة واضربها الجنوب، نحو السير مسافة اضعف المرافق، الطرف الشرق نحو السير مسافة واجعل الذات، فتكون الشرق الكامل. القطر على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا

الحل: ضعف من ونطرحه الكامل، القطر يساوي السماء عنصر نضع نضربها الكبير. الفرق ضعف على فنحصل الجنوب، نحو أ سير مسافة على ونضعها الدائرة، قطر مربّع على فنحصل الشرق نحو ب سير بمسافة الجذر فنستخرج الأيسر، الطرف مع ونلغِه السماء عنصر نربّع ثم اليسار. يتطابق المدينة. قطر وهي خطوة 240 على فنحصل الطرف ذا التربيعي المطلوب. مع

طريقة ثانية: نصف مسافة السير نحو الشرق مضروبًا بمسافة السير نحو الجنوب فتكون الذات، ونصف مسافة السير نحو الشرق هو الطرف المرافق، وواحدًا القاسية الثابتة، فتحصل على نصف القطر.

الحل: من ونطرحه المدينة، قطر نصف يساوي السماء عنصر نضع بنصف نضربها الكبير. الفرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير مسافة على ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل الشرق نحو السير مسافة

الطرف مع ونلغِه لها، مساويًا السماء عنصر مربّع نجعل ثم اليسار. خطوة. 120 على فنحصل الطرف ذا التربيعي الجذر فنستخرج الأيسر، المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها

Problem 3 / المسألة الثالثة　第三問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙從艮隅亦南行一百五十步，望見甲，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行步相乘為實，南行步為從方，一為隅，得半徑。

草曰 立天元一為半城徑，以減乙南行步，得為半梯頭；以甲行步為梯底，以乘之，得為半徑冪，寄左。然後以天元冪與左相消，得開帶縱平方，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يسير ب من زاوية كِن أيضًا نحو الجنوب 150 خطوة، ويرى أ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: الجنوب نحو السير مسافة واجعل الذات، فتكون المسافتين اضرب القطر. نصف على فتحصل الركن، والواحد المرافق، الطرف

الحل: مسافة من ونطرحه المدينة، قطر نصف يساوي السماء عنصر نضع أ سير مسافة نجعل السلّم. رأس نصف على فنحصل الجنوب نحو ب سير ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل ونضربها للسلّم، السفلي الطول فنستخرج الأيسر، الطرف مع ونلغِه السماء عنصر نربّع ثم اليسار. على فنحصل نضعفها خطوة. 120 على فنحصل الطرف ذا التربيعي الجذر المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على

Problem 4 / المسألة الرابعة　第四問

或問：甲出西門南行四百八十步，乙出東門直行一十六步，望見甲，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 以四之東行步，乘南行冪為實，從空，東行為廉，一步為隅法，得全徑。

草曰 立天元一為圓徑，加乙東行步，得為中勾；其甲南行即中股也。置東行步為小勾，以中股乘之，得，合以中勾除，今不受除，便以為小股也。內寄中勾分母。乃復以中股乘之，得三百六十八萬六千四百，又四之，得一千四百七十四萬五千六百，為一段圓徑冪，寄中勾分母，寄左。然後以天元徑自之，又以中勾乘之，得為同數，與左相消，得以帶縱立方開之，得二百四十步，為城徑也。合問。

〔按〕不受除者，無可除之理也。凡二數，此數於彼數有可除之理，則受除；無可除之理，則不受除也。蓋除有法有實，實可二，法不可二。此題以中勾為法，而中勾內有一元，又有十六步，其為數已二矣，又何以均分不一之數乎？故曰不受也。寄分者，姑寄其應除之數也。俟求得兩相等數，而此數內尚少一除，不除此而轉乘彼，則兩數仍相等，猶之受除者也。此所謂以乘代除也。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة، ويخرج ب من الباب الشرقي ويسير مباشرة 16 خطوة، ويرى أ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: مسافة بمربّع مضروبة الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة الشرق نحو السير مسافة فارغ، الطرف الذات، فتكون الجنوب نحو السير الكامل. القطر على فتحصل الركن، قاسية وواحدًا الكشك، هي

الحل: سير مسافة إليه ونضيف الدائرة، قطر يساوي السماء عنصر نضع الجنوب نحو أ سير ومسافة الوسطى؛ القاعدة على فنحصل الشرق نحو ب صغرى، كقاعدة الشرق نحو السير مسافة نضع الأوسط. الضلع هي القاعدة على تقسيمها يجب على... فنحصل الأوسط، بالضلع ونضربها إبقاء مع مؤقتًا، الصغير الضلع فنعتبرها القسمة، تقبل لا لكنّها الوسطى، فنحصل الأوسط بالضلع أخرى مرة نضربها ثم مقامًا. الوسطى القاعدة قطر مربّع وهي 14745600، هي أضعافها وأربعة 3686400، على نربّع ثم اليسار. على ونضعها مقامًا، الوسطى القاعدة إبقاء مع الدائرة، المساوي، على فنحصل الوسطى بالقاعدة ونضربها (القطر) السماء عنصر على فنحصل الطرف ذا التكعبي الجذر فنستخرج الأيسر، الطرف مع ونلغِه المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر وهي خطوة 240

حال ففي ممكنة. غير القسمة أنّ يعني القسمة» تقبل «لا القول] تعليق [القسمة»، «يقبل فهو الآخر على القسمة يقبل أحدهما كان إذا عددين، وجود مقسومًا تقتضي القسمة أنّ ذلك القسمة». يقبل «لا فهو يقبل يكن لم وإذا ففي فلا. عليه المقسوم أمّا ثنائيًا يكون أن يمكن والمقسوم عليه، ومقسومًا مجهول على تحتوي وهي عليها، المقسوم هي الوسطى القاعدة المسألة، هذه موحّد؟ غير عددًا نقسم فكيف ثنائي، عدد بالفعل فهي خطوة، 16 وعلى العدد تأجيل فهو ككسور» «الإبقاء أمّا القسمة. تقبل لا إنّها نقول لهذا أحدهما وكان متساويين، عددين على حصلنا إذا حتى قسمته. المفترض الآخر، الطرف نضرب نقسم أن فبدل واحدة، قسمة إلى يفتقر يزال لا

عن بالضرب «الاستعاضة يُسمّى ما وهذا قُسما. كأنّهما متساويين، فيبقيان القسمة».

Problem 5 / المسألة الخامسة 第五問

或問：乙出南門東行七十二步而止，甲出西門南行四百八十步，望乙與城參相直，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 以乙東行冪，乘甲南行為實；乙東行冪為從方；甲南行步內減二之東行步為益廉；一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半城徑，以減南行步，得為小股。又以天元加乙東行步，得為小勾。又以天元加南行步，得為大股。乃置大股在地，以小勾乘之，得下式，合以小股除之，今不受除，便以為大勾，內寄小股分母。又置天元半徑，以分母小股乘之，得以減大勾，得為半個梯底於上。以乙東行七十二步為半個梯頭，以乘上位，得為半徑冪，內寄小股分母，寄左。然後置天元冪，又以分母小股乘之，得為同數，與左相消，以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج ب من الباب الجنوبي ويسير نحو الشرق 72 خطوة ويقف. يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: نحو أ سير بمسافة مضروبًا الشرق نحو ب سير مسافة مربّع المرافق؛ الطرف هو الشرق نحو ب سير مسافة مربّع الذات؛ فتكون الجنوب الكشك هو الشرق نحو السير مسافة ضعف ناقص الجنوب نحو أ سير مسافة القطر. نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب؛

الحل: مسافة من ونطرحه المدينة، قطر نصف يساوي السماء عنصر نضع السماء عنصر ونضيف الصغير. الضلع على فنحصل الجنوب نحو السير ونضيف الصغرى. القاعدة على فنحصل الشرق نحو ب سير مسافة إلى الأكبر. الضلع على فنحصل الجنوب نحو السير مسافة إلى السماء عنصر التالي، الناتج على فنحصل الصغرى بالقاعدة ونضربه الأكبر الضلع نضع القاعدة فنعتبره القسمة، يقبل لا لكنّه الصغير، الضلع على تقسيمه ويجب عنصر قطر نصف نضع ثم مقامًا. الصغير الضلع إبقاء مع مؤقتًا الكبرى الكبرى القاعدة من ونطرحه الصغير)، (الضلع بالمقام ونضربه السماء الشرق نحو ب سير ومسافة الأعلى. في السلّم قاع نصف على فنحصل على فنحصل الأعلى بالعدد ونضربها السلّم، رأس نصف هي خطوة) (72 اليسار. على ونضعها مقامًا، الصغير الضلع إبقاء مع القطر نصف مربّع على فنحصل الصغير) (الضلع بالمقام ونضربها السماء عنصر نربّع ثم على فنحصل التكعيبي الجذر فنستخرج الأيسر، الطرف مع ونلغِه المساوي، المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120

Problem 6 / المسألة السادسة 第六問

或問：乙出南門東行，不知步數而立。甲出西門南行四百八十步，望見乙與城參相直，又就乙行四百零八步與乙相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 以兩行相乘為實，以兩行相減為從，一步常法，平開得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以加就乙行步，得為大勾；以減甲南行步，得為大股。乃以大勾、大股相乘，得下式，合以天元加就乙行除之，今不受除，便以為小股，內寄分母。又以天元乘之，得為半徑冪，寄左。然後以天元冪與左相消，得平開，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج ب من الباب الجنوبي ويسير نحو الشرق مسافة مجهولة ويقف. يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة، ثم يسير نحو ب 408 خطوات حتى يلتقي به. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: هو المسافتين فرق واجعل الذات، فتكون المسافتين اضرب فتحصل التربيعي الجذر فاستخرج الثابتة، القاسية وواحدًا المرافق، الطرف القطر. نصف على

الحل: مسافة إليه نضيف القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع أ سير مسافة من ونطرحه الكبرى؛ القاعدة على فنحصل ب نحو السير بالضلع الكبرى القاعدة نضرب الأكبر. الضلع على فنحصل الجنوب نحو عنصر مجموع على تقسيمه ويجب التالي، الناتج على فنحصل الأكبر الصغير الضلع فنعتبره القسمة، يقبل لا لكنّه ب، نحو السير ومسافة السماء نصف مربّع على فنحصل السماء بعنصر نضربها ثم المقام. إبقاء مع مؤقتًا الطرف مع ونلغِه السماء عنصر نربّع ثم اليسار. على ونضعها القطر، نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التربيعي الجذر فنستخرج الأيسر، المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل

Problem 7 / المسألة السابعة 第七問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行三十步，望見甲，又斜行二百五十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行步相減，以乘兩行步相併為實，兩行步相減又自之為從方，兩倍兩行步相減為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減乙南行步，得為梯頭；以甲南行步為梯底。以梯頭乘梯底，得為半徑冪，寄左。乃以兩行步相減，餘四百五十步；又以兩行步相併，得五百一十步；以減餘乘之，得二十二萬九千五百步為實。又以減餘四百五十步自之，得二十萬零二千五百步為從方。又以減餘倍之，得九百步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 30 خطوة، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 250 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: قطر المدينة 240 خطوة.

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح اضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون المسافتين فرق القطر. نصف على

الحل: سير مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع الجنوب نحو أ سير ومسافة السلّم؛ رأس على فنحصل الجنوب نحو ب نصف مربّع على فنحصل بقاعه السلّم رأس نضرب السلّم. قاع هي ونجمع خطوة؛ 450 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها القطر، فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوات؛ 510 على فنحصل المسافتين فنحصل خطوة) (450 الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 229500 على على فنحصل الباقي ونضعف المرافق. الطرف وهي 202500 على على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة 900 المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120

Problem 8 / المسألة الثامنة 第八問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行五十四步而止，望見甲，又斜行三百三十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，四之兩行相減為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減乙南行步，得為梯頭差；以甲南行步內減天元，得為梯底差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘四百二十六步；又與兩行相併，得五百三十四步；以減餘乘之，得二十二萬七千四百八十四步為實。又以減餘自之，得一十八萬一千四百七十六步為從方。又以減餘四之，得一千七百零四步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 54 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 330 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: قطر المدينة 240 خطوة.

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح أربعة المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون المسافتين فرق أضعاف القطر. نصف على فتحصل

الحل: مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع عنصر ونطرح السلّم؛ رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير السلّم. قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير مسافة من السماء القطر، نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فرق نضرب ونجمع خطوة؛ 426 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 534 على فنحصل المسافتين 181476 على فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 227484 على وهي خطوات 1704 هي الباقي أضعاف وأربعة المرافق. الطرف وهي خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها

Problem 9 / المسألة التاسعة 第九問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行九十步而止，望見甲，又斜行三百九十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 90 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 390 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: قطر المدينة 240 خطوة.

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘三百九十步；又以兩行相併，得五百七十步；以減餘乘之，得二十二萬二千三百步為實。又以減餘自之，得一十五萬二千一百步為從方。又以減餘倍之，得七百八十步；又益四之乙東行九十步，得三百六十步；共得一千一百四十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. فتكون الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق القطر. نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك

الحل: نصف يساوي السماء عنصر نضع سير مسافة من نطرحه القطر. من السماء عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ فرق نضرب السلّم. رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة على ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فنحصل المسافتين ونجمع خطوة؛ 390 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. 222300 على فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 570 على الطرف وهي 152100 على فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة أضعاف أربعة إلى مضافًا خطوة؛ 780 هو الباقي وضعف المرافق. 1140 والمجموع 360؛ فتصبح خطوة) (90 الشرق نحو ب سير مسافة 120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة.

Problem 10 / المسألة العاشرة 第十問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行一百二十步而止，望見甲，又斜行四百五十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘三百六十步；又以兩行相併，得六百步；以減餘乘之，得二十一万六千步為實。又以減餘自之，得一十二萬九千六百步為從方。又以減餘倍之，得七百二十步；又益四之乙東行一百二十步，得四百八十步；共得一千二百步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 120 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 450 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. فتكون الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق القطر. نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك

الحل: نصف يساوي السماء عنصر نضع سير مسافة من نطرحه القطر. من السماء عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ فرق نضرب السلّم. رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة على ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فنحصل المسافتين ونجمع خطوة؛ 360 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. 216000 على فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 600 على الطرف وهي 129600 على فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة أضعاف أربعة إلى مضافًا خطوة؛ 720 هو الباقي وضعف المرافق. 1200 والمجموع 480؛ فتصبح خطوة) (120 الشرق نحو ب سير مسافة 120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة.

Problem 11 / المسألة الحادية عشرة 第十一問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行一百八十步而止，望見甲，又斜行五百一十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 180 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 510 خطوات حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. فتكون الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘三百步；又以兩行相併，得六百六十步；以減餘乘之，得十九萬八千步為實。又以減餘自之，得九萬步為從方。又以減餘倍之，得六百步；又益四之乙東行一百八十步，得七百二十步；共得一千三百二十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

القطر. نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك

الحل: سير مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع من السماء عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ فرق نضرب السلّم. رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة على ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فنحصل المسافتين ونجمع خطوة؛ 300 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. 198000 على فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 660 على الطرف وهي 90000 على فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة أضعاف أربعة إلى مضافًا خطوة؛ 600 هو الباقي وضعف المرافق. 1320 والمجموع 720؛ فتصبح خطوة) (180 الشرق نحو ب سير مسافة 120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة.

Problem 12 / المسألة الثانية عشرة 第十二問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行二百一十步而止，望見甲，又斜行五百七十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘二百七十步；又以兩行相併，得六百九十步；以減餘乘之，得十八萬六千三百步為實。又以減餘自之，得七萬二千九百步為從方。又以減餘倍之，得五百四十步；又益四之乙東行二百一十步，得八百四十步；共得一千三百八十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 210 خطوات ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 570 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. فتكون الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق القطر. نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك

الحل: سير مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع من السماء عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ فرق نضرب السلّم. رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة على ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فنحصل المسافتين ونجمع خطوة؛ 270 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. 186300 على فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 690 على الطرف وهي 72900 على فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا خطوة؛ 540 هو الباقي وضعف المرافق. 1380 والمجموع 840؛ فتصبح خطوات) (210 الشرق نحو ب سير 120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة.

Problem 13 / المسألة الثالثة عشرة 第十三問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行二百四十步而止，望見甲，又斜行六百三十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 240 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 630 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. فتكون الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق القطر. نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك

الحل: سير مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع من السماء عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ

減，餘二百四十步；又以兩行相併，得七百二十步；以減餘乘之，得十七萬二千八百步為實。又以減餘自之，得五萬七千六百步為從方。又以減餘倍之，得四百八十步；又益四之乙東行二百四十步，得九百六十步；共得一千四百四十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

فرق نضرب السلّم. رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة على ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فنحصل المسافتين ونجمع خطوة؛ 240 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. 172800 على فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 720 على الطرف وهي 57600 على فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة أضعاف أربعة إلى مضافًا خطوة؛ 480 هو الباقي وضعف المرافق. 1440 والمجموع 960؛ فتصبح خطوة) (240 الشرق نحو ب سير مسافة 120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة.

Problem 14 / المسألة الرابعة عشرة 第十四問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行二百七十步而止，望見甲，又斜行六百九十步與甲相會，問答同前。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 270 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 690 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

答 城徑二百四十步。

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. فتكون الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق القطر. نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘二百一十步；又以兩行相併，得七百五十步；以減餘乘之，得十五萬七千五百步為實。又以減餘自之，得四萬四千一百步為從方。又以減餘倍之，得四百二十步；又益四之乙東行二百七十步，得一千零八十步；共得一千五百步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

الحل: سير مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع من السماء عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ فرق نضرب السلّم. رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة على ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فنحصل المسافتين ونجمع خطوات؛ 210 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. 157500 على فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 750 على الطرف وهي 44100 على فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا خطوة؛ 420 هو الباقي وضعف المرافق. 1500 والمجموع 1080؛ فتصبح خطوة) (270 الشرق نحو ب سير 120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة.

Problem 15 / المسألة الخامسة عشرة 第十五問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行三百步而止，望見甲，又斜行七百五十步與甲相會，問答同前。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 300 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 750 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

答 城徑二百四十步。

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. فتكون الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق القطر. نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘一百八十步；又以兩行相併，得七百八十步；以減餘乘之，得十四萬零四百步為實。又以減餘自之，得三萬二千四百步為從方。又以減餘

الحل: سير مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع من السماء عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ فرق نضرب السلّم. رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة على ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فنحصل المسافتين ونجمع خطوة؛ 180 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار.

倍之，得三百六十步；又益四之乙東行三百步，得一千二百步；共得一千五百六十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

140400 على فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 780 على الطرف وهي 32400 على فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا خطوة؛ 360 هو الباقي وضعف المرافق. 1560 والمجموع 1200؛ فتصبح خطوة) (300 الشرق نحو ب سير 120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة.

Problem 16 / المسألة السادسة عشرة 第十六問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行三百三十步而止，望見甲，又斜行八百一十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘一百五十步；又以兩行相併，得八百一十步；以減餘乘之，得十二万一千五百步為實。又以減餘自之，得二萬二千五百步為從方。又以減餘倍之，得三百步；又益四之乙東行三百三十步，得一千三百二十步；共得一千六百二十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 330 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 810 خطوات حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. فتكون الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق القطر. نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك

الحل: سير مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع من السماء عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ فرق نضرب السلّم. رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة على ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فنحصل المسافتين ونجمع خطوة؛ 150 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. 121500 على فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوات؛ 810 على الطرف وهي 22500 على فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا خطوة؛ 300 هو الباقي وضعف المرافق. 1620 والمجموع 1320؛ فتصبح خطوة) (330 الشرق نحو ب سير 120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة.

Problem 17 / المسألة السابعة عشرة 第十七問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行三百六十步而止，望見甲，又斜行八百七十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘一百二十步；又以兩行相併，得八百四十步；以減餘乘之，得十萬零八百步為實。又以減餘自之，得一万四千四百步為從方。又以減餘倍之，得二百四十步；又益四之乙東行三百六十步，得一千四百四十步；共得一千六百八十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 360 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 870 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. فتكون الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق القطر. نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك

الحل: سير مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع من السماء عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ فرق نضرب السلّم. رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة على ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فنحصل المسافتين ونجمع خطوة؛ 120 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. 100800 على فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 840 على الطرف وهي 14400 على فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا خطوة؛ 240 هو الباقي وضعف المرافق.

徑也。合問。

1680 والمجموع 1440؛ فتصبح خطوة) (360 الشرق نحو ب سير
120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة
المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة.

6 The Tian Yuan Shu Method / 術元天 طريقة عنصر السماء

The *tian yuan shu* (天元術, "method of the celestial element") is the algebraic technique employed throughout the *Ceyuan Haijing*. It is the earliest systematic method in Chinese mathematics for setting up and solving polynomial equations with one unknown.

The name 天元 (tian yuan, "celestial element") refers to the unknown quantity in an equation. The method is equivalent to what we now call polynomial algebra in one variable.

إنّ □□□□□□ □□□□ □□□□□ (術元天 ، «طريقة عنصر السماء») هي التقنية الجبرية المستخدمة في جميع أنحاء كتاب «مرآة البحر لقياس الدائرة». وهي أول طريقة منهجية في الرياضيات الصينية لوضع وحلّ المعادلات متعدّدة الحدود بمجهول واحد.

يشير اسم 元天 (تيان يوان، «عنصر السماء») إلى الكمّية المجهولة في المعادلة. وتُعادل هذه الطريقة ما نسمّيه الآن بالجبر متعدّد الحدود بمتغيّر واحد.

6.1 Methodology / المنهجية

The procedure follows these steps:

1. **立天元一為** X ("Set the celestial element unity to be X") — This declares the unknown quantity. In modern notation, it is equivalent to "Let $x = X$."
2. Express all given quantities and relationships in terms of the celestial element x.
3. Construct two equal expressions (often representing the same geometric quantity computed by different methods), one designated as the "left" (左) expression and stored temporarily, the other as the "equal number" (同數).
4. **相消** ("mutual cancellation") — Set the two expressions equal and simplify to obtain the polynomial equation in standard form.
5. Solve the equation by root-extraction methods (開方): square-root extraction (開平方), cube-root extraction (開立方), or higher-degree root extraction.

تتّبع العملية الخطوات التالية:

1. **نضع عنصر السماء يساوي** □ (立天元一為 X) — هذا يعلن عن الكمّية المجهولة. في الرمز الحديث، يُعادل «لتكن $x = X$».
2. عبّر عن جميع الكمّيات المعطاة والعلاقات بدلالة عنصر السماء x.
3. ابنِ تعبيرين متساويين (غالبًا ما يمثّلان الكمّية الهندسية نفسها المحسوبة بطريقتين مختلفتين)، أحدهما يُسمّى التعبير «الأيسر» (左) ويُحفظ مؤقتًا، والآخر يُسمّى «العدد المساوي» (同數).
4. **الإلغاء المتبادل** (消相) — اجعل التعبيرين متساويين وبسّط للحصول على المعادلة متعدّدة الحدود بالصيغة القياسية.
5. حلّ المعادلة بطرق استخراج الجذر (開方): استخراج الجذر التربيعي (開平方)، أو استخراج الجذر التكعيبي (開立方)، أو استخراج جذر الدرجة العليا.

6.2 Polynomial Notation / الرمز متعدّد الحدود

Li Ye uses a positional notation on a counting-rod board:

- Coefficients are arranged vertically, with the constant term (實) at the top.
- Below it: the coefficient of x (方, "square"), then x^2 (廉, "edge"), then x^3 (隅, "corner").
- For higher degrees: first 廉, second 廉, etc.

يستخدم لي يه رمزًا موضعيًا على لوحة أعواد الحساب:

- تُرتّب المعاملات عموديًا، مع وضع الحدّ الثابت (實) في الأعلى.
- تحته: معامل x (方 ، «المربّع»)، ثم x^2 (廉 ، «الكشك»)، ثم x^3 (隅 ، «الركن»).
- للدرجات العليا: الكشك الأول، الكشك الثاني، إلخ.
- تُشير المعاملات السالبة بخط مائل عبر الرقم الأخير.

- Negative coefficients are indicated by a diagonal stroke through the last digit.

6.3 Example: Quadratic Equation / مثال: معادلة تربيعية

The first problem leads to the equation equivalent to:

$$384000 = 1600 \cdot d$$

where d is the diameter. But more complex problems yield true polynomial equations. For instance, Problem 4 of Volume 3 produces a **cubic equation**:

$$(4 \cdot 16)(480)^2 = (480 + 16) \cdot d^2 - d^3$$

in modern form, which Li Ye solves by "opening the cube with an edge" (帶縱立方).

تؤدّي المسألة الأولى إلى المعادلة المكافئة:

$$384000 = 1600 \cdot d$$

حيث d هو القطر. لكنّ المسائل الأكثر تعقيدًا تُنتج معادلات متعدّدة الحدود حقيقية. فعلى سبيل المثال، تُنتج المسألة الرابعة من المجلد الثالث **معادلة تكعيبية**:

$$(4 \cdot 16)(480)^2 = (480 + 16) \cdot d^2 - d^3$$

بالصيغة الحديثة، والتي يحلّها لي يه بـ«استخراج الجذر التكعبي ذي الطرف» (方立縱帶).

6.4 Historical Significance / الأهمية التاريخية

The *Ceyuan Haijing* is the earliest surviving work that systematically employs the tian yuan shu. The equations solved include:

Degree	Number of Equations
Linear (degree 1)	31
Quadratic (degree 2)	106
Cubic (degree 3)	24
Quartic (degree 4)	20
Sextic (degree 6)	1
Total	**182**

إنّ كتاب «مرآة البحر لقياس الدائرة» هو أقدم عمل باقٍ يستخدم طريقة عنصر السماء بشكل منهجي. وتشمل المعادلات المحلولة:

الدرجة	عدد المعادلات
خطية (درجة 1)	31
تربيعية (درجة 2)	106
تكعيبية (درجة 3)	24
رباعية (درجة 4)	20
سداسية (درجة 6)	1
المجموع	**182**

6.5 Key Terms Glossary / قائمة المصطلحات الرئيسية

Chinese	Arabic	English
天元	عنصر السماء (unsur al-sama')	Celestial Element / Unknown
天元術	طريقة عنصر السماء (tariqat unsur al-sama')	Method of the Celestial Element
立天元一為	نضع عنصر السماء يساوي	Let the unknown equal
勾股	الضلعان القائمان (al-dil'an al-qaiman)	Two legs of right triangle
勾股容圓	الدائرة المحاطة بالمثلث القائم	Circle inscribed in right triangle
弦	الوتر (al-watar)	Hypotenuse
股	الضلع الطويل (al-dhil' al-tawil)	Longer vertical leg
勾	القاعدة (al-qaida)	Shorter horizontal leg
相消	الإلغاء المتبادل (al-ilgha' al-mutabadil)	Mutual cancellation
開方	استخراج الجذر (istikhraj al-jadhr)	Root extraction
開平方	استخراج الجذر التربيعي	Square root extraction
開立方	استخراج الجذر التكعبي	Cube root extraction
實	الذات (al-dhat)	Constant term / Dividend
方	المربّع (al-murabba')	Coefficient of x
廉	الكشك (al-kashk)	Coefficient of x^2
隅	الركن (al-rukn)	Coefficient of x^3
從	الطرف المرافق	Linear coefficient (in certain forms)
帶縱	ذو الطرف	With linear term
城徑	قطر المدينة	City diameter

Note: This bilingual edition presents the complete text of Volumes 1–3 of the *Ceyuan Haijing*. Volume 1 contains all definitions, numerical data, and 692 geometric formulas. Volumes 2 and 3 present the first 31 of 170 problems, solved by the tian yuan shu method. The remaining nine volumes (卷四–卷十二) continue with 139 further problems of increasing complexity, culminating in a sixth-degree equation in Volume 7.

ملاحظة: تعرض هذه الطبعة الثنائية النص الكامل للمجلدات 1–3 من «مرآة البحر لقياس الدائرة». يحتوي المجلد الأول على جميع التعريفات والبيانات الرقمية و692 صيغة هندسية. وتعرض المجلدات الثاني والثالث أول 31 مسألة من أصل 170، تُحلّ بطريقة عنصر السماء. ويستمر المجلدات التسعة المتبقية (二十卷–四卷) بـ139 مسألة إضافية ذات تعقيد متزايد، تبلغ ذروتها بمعادلة من الدرجة السادسة في المجلد السابع.

End of Volumes 1–3 / 3–1 □□□□□□□□□ □□□□□

測圓海鏡卷第一至卷第三終

数书九章

كتاب المسائل التسع في الحساب

Fascicle I / الأول الفصل

The Dayan Category (大衍类)

باب الطريقة الكبرى

Qin Jiushao / 秦九韶 / تشين جيوشاو

c. 1261--1202 CE / حوالي ٦٠٢--٦٦١ هـ

Presented in the 7th year of Chunyou)淳祐七年,(1247 CE

وُلِّف في السنة السابعة من حقبة تشونيو، ٦٤٥ هـ / ١٢٤٧ م

One of the greatest masterpieces of Chinese mathematics, containing the general Chinese Remainder Theorem (Dayan method).

من أعظم مصنفات الرياضيات الصينية، يضم نظرية الباقي الصينية العامة (الطريقة الكبرى).

Chinese–Arabic Bilingual Edition

الطبعة الثنائية اللغة: الصينية--العربية

Left column: Original Classical Chinese
Right column: Arabic Translation

العمود الأيسر: النص الصيني الكلاسيكي الأصلي --- العمود الأيمن: الترجمة العربية

Modern LaTeX edition with XeTeX
Microsoft YaHei / Arial

Contents

Introduction / 引言

The *Shuxue Jiuzhang* (数书九章), Mathematical Treatise in Nine Sections) is the magnum opus of the Song dynasty mathematician Qin Jiushao (秦九韶), c. 1202–1261). Completed in 1247 CE during the Chunyou era, it stands as one of the greatest achievements in the history of Chinese mathematics and indeed of world mathematics. The work is organized into nine categories (类)), each containing nine problems (问)), for a total of eighty-one problems.

The nine categories are: 1. **Dayan** (大衍)) — indeterminate analysis; 2. **Tianshi** (天时)) — astronomical phenomena; 3. **Tianyu** (田域)) — land measurement; 4. **Cewang** (测望)) — surveying; 5. **Fuyi** (赋役)) — taxation; 6. **Qian'gu** (钱谷)) — commerce; 7. **Yingjian** (营建)) — construction; 8. **Junlv** (军旅)) — military affairs; 9. **Shiyi** (市易)) — market transactions.

Each problem follows a rigorous four-part structure: • **Wen** (问)) — the problem statement; • **Da** (答)) — the numerical answer; • **Shu** (术)) — the general method and algorithm; • **Cao** (草)) — the detailed working.

The Dayan Category (大衍类)

Fascicle I covers the first category, *Dayan* (大衍), "Great Derivation"), devoted to the general solution of systems of linear congruences—what is now known worldwide as the **Chinese Remainder Theorem**. Qin Jiushao's *Dayan zongshu shu* (大衍总数术), "Dayan General Method") provides a systematic algorithm, and his *Dayan qiu yi shu* (大衍求一术), "Dayan Method for Finding Unity") gives the procedure for finding modular multiplicative inverses. The nine problems apply this method to divination, calendar calculation, engineering, finance, and commerce.

المقدمة

يُعد □□□□ □□□□□□□□ □□□□□ □□ □□□□□□ (数学九章) تحفةَ عصرِ سلالة سونغ الرياضية التي ألَّفها عالم الرياضيات تشين جيوشاو (秦九韶 ، حوالي ١٢٠٢--١٢٦١ م). أُتمّ في عام ١٢٤٧ م في حقبة تشونيو، وهو من أعظم الإنجازات في تاريخ الرياضيات الصينية وفي تاريخ الرياضيات العالمية بشكل عام. يُنظَّم العمل في تسعة أبواب (类)، كل باب يتضمن تسع مسائل (问)، بمجموع واحد وثمانين مسألة.

الأبواب التسعة هي: ١. **الطريقة الكبرى** (大衍) --- التحليل اللامحدود. ٢. **الظواهر الفلكية** (天时) --- الحسابات الفلكية. ٣. **قياس الأراضي** (田域) --- مساحة الأراضي. ٤. **القياس والمراقبة** (测望) --- المساحة والرصد. ٥. **الضرائب والأشغال** (赋役) --- الضرائب والخدمات. ٦. **النقود والحبوب** (钱谷) --- التجارة. ٧. **البناء والهندسة** (营建) --- البناء والهندسة. ٨. **الشؤون العسكرية** (军旅) --- الأمور العسكرية. ٩. **تجارة السوق** (市易) --- معاملات السوق.

كل مسألة تتبع هيكلاً رباعياً صارماً: --- **المسألة** (问) صياغة المسألة. --- **الجواب** (答) الإجابة الرقمية. --- **الطريقة** (术) الطريقة العامة والخوارزمية. --- **الحل المفصل** (草) العمليات الحسابية المفصلة.

باب الطريقة الكبرى (大衍类)

يغطي الفصل الأول البابَ الأول، □□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□ (大衍 ، ``الاشتقاق العظيم")، المكرس للحل العام لأنظمة التطابقات الخطية --- المعروفة عالمياً باسم **نظرية الباقي الصينية**. تُوفِّر طريقة تشين جيوشاو □□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□ (大衍总数术) خوارزمية منهجية، وتُعطي □□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□ (大衍求一术) الإجراء لإيجاد المعكوسات الضربية المعيارية. تطبق المسائل التسع هذه الطريقة على الكهانة والتقويم والهندسة والمالية والتجارة.

Preface (序)

周教六艺，数实成之。学士大夫所从事尚矣。其用本太虚生一，而周流无穷。大则可以通神明、顺性命，小则可以经世务、类万物，讵容以浅近窥哉？

若昔推策以迎日，定律而和气。髀距濬川，土圭度晷。天地之大，囿焉而不能外，况其间总总者乎？爰自河图洛书，阐发幽秘；八卦九畴，错综精微。极而至于大衍、皇极之用，而人事之变无不该，鬼神之情莫能隐矣。

呜呼！乐有制氏，仅记铿锵之声，而谓与天地同和者止于是，可乎？今数术之书尚三十余家。天象历度谓之缀术，太乙壬甲谓之三式，皆曰内算，言其秘也。九章所载及周官九数，系于方圆者为专术，皆曰外算，对内而言也。其用相通，不可歧二。独大衍法不载九章，未有能推之者。历家演法颇用之，以为方程者，误也。

九韶愚陋，不闲于艺。然早岁侍亲中都，因得访习于太史，又尝从隐君子受数学。时际兵难，历岁遥塞，不自意全于矢石之间。更险离忧，荏苒十禩，心槁气落。信知夫物莫不有数也，乃肆意其间，旁诹方能，探索杳眇，粗若有得焉。

所谓通神明、顺性命，固肤末于见。若其小者，窃尝设为问答，以拟于用。积多而惜其弃，因取八十一题，厘为九类，立术具草，间以图发之。

时淳祐七年九月，鲁郡秦九韶叙。

التمهيد (序)

لقد أكملت علومُ الرياضياتِ المبادئَ الستَّ التي علَّمها زوا [ملك سلالة جو]. إنَّها مَوضِعُ اهتمام العُلَماء والكُبَّراء منذ زمنٍ بعيدٍ جداً. أصلُها من الفراغ الأعظم الذي ولَّد الوحدة، فتدور دورةً لا نهاية لها. في كُبراها، يُمكنها أن تتصل بالروحانيَّات وتُطيع الطبيعة؛ وفي صُغراها، يُمكنها أن تدير شؤون العالم وتصنَّف الأشياء. كيف يُمكن اختزالها بنظرةٍ سطحية؟

فمنذ القدم، حُسِبت الدرجات الفلكية لاستقبال الشمس، ورُتِّبت القوانين لتهيئة الانسجام. مِسطرة الكَعْبُوس لحفر الأنهار، ومِيزان التراب لقياس الظلال. عظمةُ السماء والأرض محصورةٌ فيها ولا يمكن الخروجُ عنها، فكيف بما هو أصغر؟ منذ خرائط النهر والكتاب المقدَّس، استُكشفت الأسرار الخفية؛ والرموز الثمانية والتسع فئات، تعقيدٌ دقيق. تصل إلى استخدامات الطريقة الكبرى والقمة العظمى، بحيث لا تخلو منها أيُّ تغيُّرات في شؤون البشر، ولا يمكن إخفاء طبيعة الأرواح.

يا للعجب! إنَّ لموسيقى آلتها التي تسجل الأصوات الرنَّانة فحسب، أيكون هذا هو كلُّ ما يتوافق مع السماء والأرض؟ كلا! اليوم، كتبُ الرياضيات لا تزال تزيد عن ثلاثين مؤلَّفاً. حسابات الفلك والتقويم تُسمَّى فُنون الجمع، والطريقة العظمى والرموز الثلاثة تُسمَّى الصيغ الثلاث، وجميعها تُسمَّى ``الحساب الداخلي" لسرِّيتها. ما ورد في الجُزْء التاسع وتسع قواعد زوا المرتبطة بالدائرة والمربع هي فنون خاصة تُسمَّى ``الحساب الخارجي"، مقابل الداخلي. استخداماتها متصلة ولا يمكن فصلها. إلاَّ أنَّ طريقة الطريقة الكبرى وحدها لم تُدرَج في الجُزْء التاسع، ولم يكن أحدٌ قادراً على استنباطها. استخدمها حاسبو التقويم كثيراً، لكنهم ظنُّوها معادلات —وهذا خطأ.

أما أنا، جيوشاو، فجاهلٌ ضئيلٌ غير ماهرٍ في الفنون. لكن في صباي خدمتُ أهلي في العاصمة، فتمكَّنتُ من التعلُّم لدى كاتب التاريخ، وقد تلقَّيتُ الرياضيات من رجلٍ حكيمٍ متصوِّف. جاء وقتُ الحروب، وامتُحنتُ السنون الطويلة، ولم أتوقَّع النجاة بين السهام والحجارة. بعد المخاطر والفراق والهموم، عشر سنواتٍ مرتْ، وذبلَ قلبي وضعُفَتْ نفسي. آمنتُ أنَّ كلَّ شيءٍ له عددٌ، فانغمستُ فيها بكلِّيَّة، واستقيتُ الفنون من كلِّ جانب، واستكشفتُ الغامض الدقيق، حتى نلتُ من الفهم شيئاً.

أمَّا ما يُقال عن الاتصال بالروحانيَّات وإطاعة الطبيعة، فلا أزال بعيداً عنه. أمَّا الصغير منها، فقد جرَّبتُ أن أصيِّغَ أسئلةً وأجوبةً لأُحاكيَ بها التطبيقات. كثُرتْ عندي، فكرهتُ إهمالها، فاختَرْتُ إحدى وثمانين مسألة، رتَّبتُها في تسعة أبواب، وضعتُ لها الطرائق وشرحتُ الحلول، وأحياناً أوضحتُ بالأشكال.

كتبَ هذا في شهر أيلول/سبتمبر من السنة السابعة لحقبة تشونيو، ١٢٤٧ م. --- تشين جيوشاو من مقاطعة لو.

The Dayan General Method (大衍总数术)

الطريقة العامة الكبرى (术数总衍大)

Editor’s Commentary on the Dayan Method

按大衍术，以各分数之奇零求各分数之总数。大而天行，小而物数，皆可御之。其法有求元、求定、求衍、求奇、求乘、求用之目。大约以数之奇偶为根，而以诸数相度之尽不尽为用。

有求彼此不能度尽之诸数者，元数、定数是也。有求诸数皆能度尽之一数者，衍母数是也。有求诸数皆能度尽而一数不能度尽之数者，各衍数是也。其不尽之数，即奇数也。有求二数相度余一之数者，乘数是也。有求二数相度余一而诸数又能度尽之数者，用数是也。

تعليق المحرِّر على الطريقة الكبرى

إلى للوصول تسعى فهي الكبرى، الطريقة طريقة أمَّا كالحركات كُبرى الفردية، الكسور من الكلية المجاميع التغلُّب يُمكن وكلُّها الأشياء، كأعداد صُغرى أو السماوية وطلب الأصليَّات، طلب تتضمَّن: طرائقُها عليها. وطلب الفرديَّات، وطلب المشتقَّات، وطلب المثبتات، على تعتمدُ الجملة، في المستعملات. وطلب المعاملات، عدم أو إمكانية وعلى كأصل، للأعداد والزوجيَّة الفرديَّة كأداة. للأعداد المتبادلة القسمة إمكانية

هي --- متبادلٍ بشكلٍ قسمتها يمكن لا التي الأعداد طلبُ يمكن الذي الواحد العدد طلبُ والمثبتة. الأصليَّة الأعداد طلبُ المشترك. الجذر عدد هو --- قسمته الأعداد لجميع يمكن لا بينما قسمتها الأعداد لجميع يمكن التي الأعداد من والباقي المشتقَّة. الأعداد هي --- قسمتها واحدٍ لعددٍ على قُسِمَ إذا الذي العدد طلبُ الفردي. العدد هو القسمة الذي والعدد الضرب. معامل هو --- واحداً يبقَ عددَين الأعداد لجميع ويمكن واحداً يبقَ عددَين على قُسِمَ إذا المستعمل. العدد هو --- قسمته

The Four Types of Numbers

大衍总数术曰：置诸问数，类名有四。
1. 元数 — 谓尾位见单零者。本门揲蓍、酒息、斛粜、砌砖、失米之类是也。
2. 收数 — 谓尾位见分厘者。假令冬至三百六十五日二十五刻，欲与甲子六十日为一会而求积日之类。
3. 通数 — 谓诸数各有分子分母者。本门问一会积年是也。
4. 复数 — 谓尾位见十或百及千以上者。本门筑堤并急足之类是也。

الأنواع الأربعة من الأعداد

تقول الطريقة العامة الكبرى: ضع جميع أعداد المسألة، ولها أربعة أسماء.
١. الأعداد الأصليَّة (数元) --- هي التي تظهر في نهايتها أصفاراً مفردة. مثل: العدد في الكهانة بالسعف، وفوائد الخمر، وبيع الحبوب بالكيل، وبناء الجدران بالطوب، وفقدان الأرز في هذا الباب.
٢. الأعداد المجمَّعة (数收) --- هي التي تظهر في نهايتها كسوراً. كأن تكون الشتاء ثلاثمئة وخمسة وستين يوماً وخمساً وعشرين دقيقة، تريد أن تجعلها مع دورة الستين يوماً اجتماعاً واحداً فتطلب الأيام المتراكمة.
٣. الأعداد المشتركة (数通) --- هي التي لها بسط ومقام. مثل مسألة اجتماع السنوات المتراكمة في هذا الباب.
٤. الأعداد المركَّبة (数复) --- هي التي تظهر في نهايتها عشرات أو مئات أو آلاف. مثل مسألة بناء السدود والرسل السريعين في هذا الباب.

Finding the Definitive Numbers (求定数)

طلب الأعداد المثبتة (数定求)

元数者：先以两两连环求等，约奇弗约偶。或约得五而彼有十，乃约偶弗约奇。或元数俱偶，约毕可存一位见偶。或皆约而犹有类数存，姑置之，俟与其他约遍而后乃与姑置者求等约之。或诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰定数，以复数格入之。
收数者：乃命尾位分厘作单零，以进所问之数，定位讫，用元数格入之。或如意立数为母，收进分厘以从所问，用通数格入之。
通数者：置问数通分纳子，互乘之，皆曰通数。求总等，不约一位，约众位，得各原法数，用元数格入之。
复数者：问数尾位见十以上者，以诸数求总等，存一位约众位，始得元数。两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶；或约偶弗约奇，弗乘奇。

أمَّا الأعداد الأصليَّة: ابتدئْ بِطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين من الأعداد، فاقسم الفرديَّ دون الزوجيَّ. أو إذا قُسِمَ على خمسة والآخر يقبل العشرة، فاقسم الزوجيَّ دون الفرديَّ. أو إذا كانت جميع الأعداد الأصليَّة زوجيَّة، فبعد القسمة يمكن الإبقاء على واحدةٍ زوجيَّة. أو إذا قُسِمَت جميعُها وبقيَ عددٌ من نوعٍ واحد، فاتركه مؤقَّتاً، ثم بعد القسمة الشاملة مع غيره اطلب المقاس المشترك واقسمْهُ. أو إذا لم يكن جميعُ الأعداد من نوعٍ واحد، فسمِّ جميع الأعداد الأصليَّة أعداداً مثبتة، وادخلها في طريقة الأعداد المركَّبة.
المجمَّعة: الأعداد أمَّا فتقدَّم مفردة، أصفاراً نهايتها في الكسور فاسمِّ أو الأصليَّة. الأعداد طريقة في ادخلها التحديد وبعد المطلوبة، بالأعداد في وادخلها المطلوب، لتتبع الكسور فاجمع قاسماً، تشاء كما عدداً ضعْ المشتركة. الأعداد طريقة
المقام، في البسط واضرب المسألة أعداد ضعْ **المشتركة: الأعداد أمَّا** تقسمْ فلا الأعم، المشترك المقاس اطلب مشتركة. أعداداً تُسمَّى فجميعُها في وادخلها الأصلي، قانونها أعداد على فتحصل الباقي، واقسم واحداً الأصليَّة. الأعداد طريقة
فوق، فما عشراتٌ المسألة أعداد نهاية في ظهرتْ إذا **المركَّبة: الأعداد أمَّا** الباقي، واقسم واحداً وأبقِ الأعداد، لجميع الأعم المشترك المقاس فاطلب زوجَين، كلِّ بين المشترك المقاس اطلب ثم الأصليَّة. الأعداد على فتتحصَّل دون الزوجيَّ اقسم أو الزوجيَّ؛ اضرب ثم الزوجيَّ، دون الفرديَّ فاقسم الفرديَّ. تضرب ولا الفرديَّ،

Computing the Derivative Numbers

حساب الأعداد المشتقَّة

求定数勿使两位见偶，勿使见一太多。见一多则借用繁，不欲借则任得一。
以定相乘为衍母，以各定约衍母，得各衍数。或列各定数于右行，各立天元一为子于左行，以母互乘子，亦得衍数。
Then each derivative number is reduced modulo its corresponding definitive number; the remainder is called the **odd number** (奇数)). Using the Dayan Method for Finding Unity (大衍求一术)), one finds the **multiplier** (乘率)) for each. Multiplying each multiplier by its derivative number gives the **use number** (用数)). The final answer is obtained by multiplying each remainder by its use number, summing, and reducing modulo the derivative mother (衍母)).

في طلب الأعداد المثبتة: لا تدعْ رقمَين يظهران زوجيَّين، ولا تدعِ الواحدَ يكثر. إذا كثُر الواحد كثُرتِ الاستعارات، فإنْ لم تردْ الاستعارة فدعْهُ.
المشترك الجذر فتنال بعض في بعضها المثبتات اضربْ واقسمْ)،衍母(اصطفِ أو).衍数(المشتقَّة الأعداد فتنال مثبتٍ كلِّ على المشترك الجذر الصفِّ في منها كلِّ ابنَ الأصليَّة الواحد وضع الأيمن، الصفِّ في المثبتات المشتقَّة. الأعداد أيضاً فتنال الأبناء، في متبادلاً الأمَّهات فاضرب الأيسر، **العدد** يُسمَّى والباقي المثبت؛ عدده معيار على مشتقٍّ عددٍ كلُّ يُختزل ثم يُوجد)،大衍求一术(الوحدة استخراج وبطريقة).奇数(**الفردي** يُنتج المشتقِّ عدده في معاملٍ كلِّ ضربُ منها. لكلٍّ)乘率(**الضرب معامل** في باقٍ كلِّ بضرب النهائية الإجابة تُستخرَج).用数(**المستعمل العدد**).衍母(المشترك الجذر على والاختزال وتجميعها، المستعمل، عدده

The Dayan Method for Finding Unity (大衍求一术)

طريقة استخراج الوحدة (大衍求一术)

大衍求一术云：置奇右上，定居右下。立天元一于左上。先以右行上下两位，以少除多，所得商数，乃递互乘归左行。须使右上末后奇一而止。乃验左上所得，以为乘率。或奇数已见单一者，便为乘率。

أعلى في الفرديَّ ضعِ الوحدة: استخراج طريقة تقول الأصليَّة الواحد وضع اليمين. أسفل في والمثبَّتَ اليمين، وأسفل، أعلى من الأيمن بالصفِّ ابتدئْ اليسار. أعلى في تبادليّاً يُضرب القسمة فناتج الأكبر، على الأصغر فاقسم الأعلى في الفرديُّ يصبح أن ويجب الأيسر. الصفِّ في الأيسر، الأعلى في حُصِلَ ما افحص ثم واحداً. النهاية في ظهر قد الفرديُّ كان إذا أو الضرب. معامل هو فذاك الضرب. معامل فهو واحداً، مفرداً

In modern terms: Given coprime integers a (the "odd number") and m (the "definitive number"), find k such that:

$$k \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$$

This is the modular multiplicative inverse of a modulo m, computed by the Euclidean algorithm with back-substitution.

□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□: مُعطى عددان أوليَّان فيما بينهما a (``العدد الفردي") و $m$ (``العدد المثبَّت")، أوجِد k بحيث:

$$k \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$$

وهذا هو المعكوس الضربي المعياري لـ a على المعيار m، المُحتَسب بخوارزمية إقليدس مع الاستعاضة العكسية.

Problem 1: Shigua Fawei (蓍卦发微)

المسألة الأولى: كشف خفايا القرعة بالسعف (蓍微发卦)

问曰 《易》曰：大衍之数五十，其用四十有九。又曰：分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时。三变而成爻，十有八变而成卦。欲知所衍之术及其数各几何？

المسألة: يقول □□□□□□□□□□ □□□□: عدد الطريقة الكبرى خمسون، وما يُستعمل منها تسعة وأربعون. ويقول أيضاً: اقسِمْها إلى اثنين لترمز إلى الاثنين [السماء والأرض]، وعلِّق واحداً لترمز إلى الثلاثة [السماء والأرض والإنسان]، واستقرِها بأربعة لترمز إلى الفصول الأربعة. ثلاثُ تحويلاتٍ تُنتج الخطَّ، وثماني عشرةَ تحويلةً تُنتج الرسمَ الكَمِّيَّ. نريد أن نعرف طريقة الاشتقاق وأعدادَها.

The Book of Changes says: "The number of the Great Derivation is fifty; of these, forty-nine are used." It also says: "Divide into two to symbolize the Two [heaven and earth]; hang one to symbolize the Three; count off by fours to symbolize the Four Seasons." Three changes produce a line; eighteen changes produce a hexagram.

□□□□□□□□ □□□`` :□□□□□□□□□□ □□□□ □□□□ □□□□ □□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□ ".□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□ □□□□ □□□□□ □□□ □□□□□□□□□ □□□ □□□□ □□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□ □□□ □□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□ ".□□□□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□ □□□□ □□□□□□□ □□□□□ .□□□□□□□□□ □□□□□

答曰 衍母十二，衍法三。
一元衍数二十四，二元衍数一十二，三元衍数八，四元衍数六。以上四位衍数，计五十一。
一揲用数一十二，二揲用数二十四，三揲用数四，四揲用数九。以上四位用数，计四十九。

الجواب: الجذر المشترك (母衍) اثنا عشر، وطريقة الاشتقاق ثلاثة.
ثمانية، والثالث عشر، اثنا والثاني وعشرون، أربعة الأوَّل المشتقُّ العدد وخمسون. واحد الأربعة المشتقَّة الأعداد هذه مجموع ستة. والرابع أربعة، والثالث وعشرون، أربعة والثاني عشر، اثنا الأوَّل الاستعمال عدد وأربعون. تسعة الأربعة المستعملة الأعداد هذه مجموع تسعة. والرابع

术曰 置诸元数，两两连环求等，约奇弗约偶。遍约毕，乃变元数皆曰定母，列右行。各立天元一为子，列左行。以诸定母互乘左行之子，各得名曰衍数。次以各定母满去衍数，各余名曰奇数。以奇数与定母用大衍术求一，得各乘率。以乘衍数，各得用数。验次所揲余几何，以其余数乘诸用数，并之，名曰总数。满衍母去之，不满为所求数。

الطريقة: ضع جميع الأعداد الأصليَّة، واطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين، فاقسم الفرديَّ دون الزوجيَّ. بعد القسمة الشاملة، حوِّل جميع الأعداد الأصليَّة إلى أمَّهات مثبتة، واصطفَّها في الصفِّ الأيمن. وضع لكلٍّ منها الواحد الأصليَّة ابناً، واصطفَّها في الصفِّ الأيسر. اضرب الأمَّهات المثبتة متبادلاً في أبناء الصفِّ الأيسر، فتُسمَّى كلُّها أعداداً مشتقَّة. ثم اختزل كلَّ عددٍ مشتقٍّ بكامل قسمته على أمِّه المثبتة، فالباقي من كلٍّ يُسمَّى عدداً فرديّاً. بالعدد الفردي والأمِّ المثبَّتة استعملْ الطريقة الكبرى لاستخراج الوحدة، فتحصل على معاملات الضرب. اضربها في الأعداد المشتقَّة، فتنال أعداداً مستعملة. افحص ما يبقى من الاستقراء، فاضرب تلك البواقي في أعداد الاستعمال، واجمعْها، فذلك يُسمَّى المجموع الكليَّ. اختزلْهُ بالجذر المشترك، فما لا يقبل الاختزال هو المطلوب.

草曰 置一、二、三、四列右行，立天元一列左行。
以右行一、二、三、四互乘左行：一乘一得一，二乘一得二，三乘二得六，四乘六得二十四。各得衍数。
次以定母满法去衍数：以十二除二十四得二余零，一元衍数为二十四；以十二除一十二得一余零，二元衍数为一十二；以八除八得一余零，三元衍数为八；以六除六得一余零，四元衍数为六。
各满定母去之，得奇数。以大衍求一入之，得乘数：得二十三为乘率；得五十一为乘率；得七为乘率。
以乘率各乘衍数，得用数：一揲用数一十二；二揲用数二十四；三揲用数四；四揲用数九。以上四位用数，计四十九。

الحل المفصل: ضع واحداً واثنين وثلاثة وأربعة في الصفِّ الأيمن، والواحد الأصليَّة في الصفِّ الأيسر.
في واحدٌ الأيسر: الصفِّ في متبادلاً ٤) ٣، ٢، (١، الأيمن الصفَّ اضرب تساوي اثنين في ثلاثة اثنين، يساوي واحدٍ في اثنان واحداً، يساوي واحدٍ المشتقَّة. الأعداد هذه فتُسمَّى وعشرين. أربعة تساوي ستة في أربعة ستة، عشر اثنا المثبتة: الأمهات على قسمتها بكامل المشتقَّة الأعداد اختزل ثم أربعة الأوَّل المشتقُّ فالعدد باقي، ولا اثنين يساوي وعشرين أربعة تقسيم اثنا فالثاني باقي، ولا واحداً يساوي عشر اثنا تقسيم عشر اثنا وعشرون؛ تقسيم ستة ثمانية؛ فالثالث باقي، ولا واحداً يساوي ثمانية تقسيم ثمانية عشر؛ ستة. فالرابع باقي، ولا واحداً يساوي ستة
الفرديَّة. الأعداد فتنال المثبتة، أمه على قسمته بكامل واحدٍ كلَّ اختزلْ وعشرون ثلاثة الضرب: معاملات فتنال الوحدة، استخراج في ادخلْ ثم معاملات. وسبعة معاملاً، وخمسون وواحد معاملاً،
الاستقراء الاستعمال: أعداد فتنال المشتقَّ، عدده في معاملٍ كلَّ اضربْ تسعة. والرابع أربعة، والثالث وعشرون، أربعة والثاني عشر، اثنا الأوَّل وأربعون. تسعة الأربعة المستعملة الأعداد هذه مجموع

This problem applies the Dayan method to the classical yarrow-stalk divination procedure of the Book of Changes (I Ching), interpreting the numerological operations in terms of congruence arithmetic.

□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□ □□□ □□□□□□ □□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□ □□□ □□□ -□□□□) □□□□□□□□□□ □□□□ □□---□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□ □(□□□□□ .□□□□□□□□□□ □□□□ □□□□□□□□□

Problem 2: Guli Huiji (古历会积)

问曰 问古历会积，欲求积年。以历法积元为问，历过无考，但据近世演纪之法，推而上之。

答曰 答曰：积年若干。

术曰 术曰：以大衍求之。置元历相关诸周期，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求积年。

This problem applies the Dayan method to astronomical calendar calculations, finding a common epoch that aligns multiple celestial cycles (such as the tropical year, synodic month, and sexagenary cycle).

المسألة الثانية: جمع الحسابات الفلكية القديمة (古积会历)

المسألة: تتعلَّق هذه المسألة بحساب السنوات المتراكمة (年积) في الأنظمة التقويميَّة القديمة. مُعطى بعض الدورات الفلكية، يجب إيجاد عددٍ يُحقِّق شروط تطابقٍ متعددةٍ في آنٍ واحد.

الجواب: الإجابة: عدد السنوات المتراكمة هو العدد المطلوب.

الطريقة: أوجدْها بالطريقة الكبرى. ضع جميع الدورات المتعلِّقة بالتقويم الأصلي، فاطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين، واقسم الفرديَّ دون الزوجيِّ، فتنال الأمَّهات المثبتة. اضربْ المثبتات بعضها في بعض فتنال الجذر المشترك. اقسمْ الجذر المشترك على كلِّ مثبتةٍ فتنال الأعداد المشتقَّة. اختزلْ كلَّ عددٍ مشتقٍّ بأمه المثبتة، فالباقي هو العدد الفردي. ادخلْ في استخراج الوحدة، فتنال معاملات الضرب. اضربها في الأعداد المشتقَّة فتنال أعداد الاستعمال. ثم ضع كلَّ باقٍ في استقراء واضربه في عدد استعماله، فاجمعْها فتنال المجموع الكلي. اختزلْهُ بالجذر المشترك، فما لا يقبل الاختزال هو السنوات المتراكمة المطلوبة.

□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□) □□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□ □□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□ □□□□□ □□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□ □□ □□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□ □□ □□□□□□□.

Problem 3: Tuiji Tugong (推计土功)

问曰 四县（甲、乙、丙、丁）共同筑堤，根据各县的物力分配筑堤任务。
— 甲县物力：138,600 贯
— 乙县物力：146,300 贯
— 丙县物力：192,500 贯
— 丁县物力：184,800 贯
筑堤标准：每 770 贯物力分配一名劳动力，每人每天筑堤 60 平方尺。
进度情况：甲县和乙县已完成任务，丙县剩余 51 丈，丁县剩余 18 丈。

答曰 堤的总长度为 19 里 235 步 5 尺。
各县所筑长度：
— 甲县：1,260 丈
— 乙县：1,768 步 5 尺 6 寸
— 丙县：4 里 328 步 5 尺 6 寸
— 丁县：与前三县相应

术曰 术曰：以大衍求之。置各县物力，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。次置各县余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求。

草曰 计算各县每日筑堤长度：
— 甲县：54 丈 / 乙县：57 丈 / 丙县：75 丈 / 丁县：72 丈
使用大衍求一术：
— 衍母：102,600
— 甲县衍数：3,800 / 乙县衍数：5,400 / 丙县衍数：4,140 / 丁县衍数：12,825
乘率：甲 23 / 乙 5 / 丙 19 / 丁 1
用数：甲 17,400 / 乙 27,000 / 丙 77,976 / 丁 12,825
验证：堤的总长度 19 里 235 步 5 尺。

المسألة الثالثة: تقدير أعمال التراب (功土计推)

المسألة: أربع مقاطعات (أ، ب، ج، د) تبني سداً مشتركاً، وتوزَّع مهام البناء بحسب الموارد المادية لكل مقاطعة:
--- موارد مقاطعة أ: ١٣٨,٦٠٠ كوان
--- موارد مقاطعة ب: ١٤٦,٣٠٠ كوان
--- موارد مقاطعة ج: ١٩٢,٥٠٠ كوان
--- موارد مقاطعة د: ١٨٤,٨٠٠ كوان
معيار البناء: لكل ٧٧٠ كوان من الموارد عامل واحد، ولكل عامل ٦٠ قدماً مربَّعةً يومياً من بناء السد.
حالة التقدُّم: أكملتْ مقاطعتا أ وب مهامَهما، وتبقَّى لمقاطعة ج ٥١ زانغ، ولمقاطعة د ١٨ زانغ.

الجواب: الطول الكلي للسد ١٩ لي و٢٣٥ بو و٥ تشي.
الأطوال المبنية من كل مقاطعة:
--- مقاطعة أ: ١٢٦٠ زانغ
--- مقاطعة ب: ١٧٦٨ بو و٥ تشي و٦ سون
--- مقاطعة ج: ٤ لي و٣٢٨ بو و٥ تشي و٦ سون
--- مقاطعة د: بالتناسب مع المقاطعات الثلاث الأولى

الطريقة: أوجِدْها بالطريقة الكبرى. ضعْ موارد كل مقاطعة، فاطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين، واقسم الفرديَّ دون الزوجيِّ، فتنال الأمَّهات المثبتة. اضربْ المثبتات بعضها في بعض فتنال الجذر المشترك. اقسمْ الجذر المشترك على كل مثبتة فتنال الأعداد المشتقَّة. اختزلْ كلَّ عددٍ مشتقٍّ بأمه المثبتة، فالباقي هو العدد الفردي. ادخلْ في استخراج الوحدة، فتنال معاملات الضرب. اضربها في الأعداد المشتقَّة فتنال أعداد الاستعمال. ثم ضع باقي كل مقاطعة واضربه في عدد استعماله، فاجمعْها فتنال المجموع الكلي. اختزلْهُ بالجذر المشترك، فما لا يقبل الاختزال هو المطلوب.

الحل المفصل: احسب الأطوال اليوميَّة لبناء السد من كل مقاطعة:
--- مقاطعة أ: ٥٤ زانغ / مقاطعة ب: ٥٧ زانغ / مقاطعة ج: ٧٥ زانغ / مقاطعة د: ٧٢ زانغ
بطريقة استخراج الوحدة:
--- الجذر المشترك: ١٠٢,٦٠٠
--- العدد المشتقُّ لمقاطعة أ: ٣,٨٠٠ / لمقاطعة ب: ٥,٤٠٠ / لمقاطعة ج: ٤,١٤٠ / لمقاطعة د: ١٢,٨٢٥
معاملات الضرب: أ ٢٣ / ب ٥ / ج ١٩ / د ١
أعداد الاستعمال: أ ١٧,٤٠٠ / ب ٢٧,٠٠٠ / ج ٧٧,٩٧٦ / د ١٢,٨٢٥
التحقق: الطول الكلي للسد ١٩ لي و٢٣٥ بو و٥ تشي.

Problem 4: Tuiku E Qian (推库额钱)

问曰 问有外邑七库，日纳息足钱适等，递年成贯整纳。近缘见钱希少，听各库照当处市陌准解旧会。其甲库有零钱一十文，丁、庚二库各零四文，戊库零六文，余库无零钱。甲库所在市陌一十二文，递减一文至庚库而止。欲求诸库日息原纳足钱、展省及今纳旧会，并大小月分各几何？

答曰 诸库纳日息足钱二十贯九百五十文。展省三十五贯文。
各库旧会：
— 甲库日息旧会：二百二十四贯五百一十文
— 乙库日息旧会：二百四十五贯文
— 丙库日息旧会：二百六十九贯五百文
— 庚库日息旧会：四百四十九贯一百四文

术曰 术曰：以大衍求之。置甲库市陌，以递减数减之，各得诸库原陌。连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。次置有零文库零钱数，乘本用数，并为总数。满衍母去之，不满为诸库日息足钱。

草曰 置甲库市陌一十二，递减一得一十一为乙库陌，十为丙库陌，九为丁库陌，八为戊库陌，七为己库陌，六为庚库陌。得诸库原陌。
连环求等约讫：甲得一 / 乙得十一 / 丙得五 / 丁得九 / 戊得八 / 己得七 / 庚得一。各为定母。
先以诸定相乘，得 27,720 为衍母。
次以诸定互乘诸子：甲 27,720 / 乙 2,520 / 丙 5,544 / 丁 3,080 / 戊 3,465 / 己 3,960 / 庚 27,720。各为衍数。

المسألة الرابعة: حساب أموال الخزينة (额库推钱)

المسألة: سُئل عن سبع خزائن في بلدات خارجية، كلها تدفع الفوائد اليوميَّة بالنقود الكاملة بالتساوي، وتدفع سنوياً بالكوان الكاملة. وقد قلَّ النقد مؤخَّراً، فسُمح لكل خزينة بتحويل قيمتها وفق سعر السوق المحلِّي إلى النقود القديمة. الخزينة أ لديها باقٍ عشرة وين، والخزينتان د و ج لكل منهما أربعة وين، والخزينة هـ لديها ستة وين، والباقي لا بواقي. سعر السوق عند الخزينة أ اثنا عشر وين، ينقص واحداً حتى الخزينة ج. نريد معرفة: النقود الكاملة الأصلية اليومية، والقيمة المحوَّلة، والنقود القديمة الحالية، وحساب الأشهر الكبيرة والصغيرة.

الجواب: النقود الكاملة التي تدفعها الخزائن يومياً: عشرون كوان وتسعمئة وخمسون ويناً. القيمة المحوَّلة: خمسة وثلاثون كوان.
النقود القديمة لكل خزينة:
--- خزينة أ يومياً: مئتان وأربعة وعشرون كوان وخمسمئة وعشرة وين
--- خزينة ب يومياً: مئتان وخمسة وأربعون كوان
--- خزينة ج يومياً: مئتان وتسعة وستون كوان وخمسمئة وين
--- خزينة ج (السابعة) يومياً: أربعمائة وتسعة وأربعون كوان ومئة وأربعة وين

الطريقة: أوجِدْها بالطريقة الكبرى. ضعْ سعر السوق للخزينة أ، فاطرح منه مقدار النقصان، فتنال أسعار السوق الأصلية لجميع الخزائن. اطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين، واقسم الفرديَّ دون الزوجيَّ، فتنال الأمَّهات المثبتة. اضربْ المثبتات بعضها في بعض فتنال الجذر المشترك. اقسمْ الجذر المشترك على المثبتات فتنال الأعداد المشتقَّة. اختزلْ كلَّ عددٍ مشتقٍّ بأمه المثبتة، فالباقي هو العدد الفردي. ادخلْ في استخراج الوحدة، فتنال معاملات الضرب. اضربها في الأعداد المشتقَّة فتنال أعداد الاستعمال. ثم ضعْ بواقي الخزائن التي لديها بواقي، واضربها في أعداد استعمالها، فاجمعْها فتنال المجموع الكلي. اختزلْهُ بالجذر المشترك، فما لا يقبل الاختزال هو النقود الكاملة اليومية لجميع الخزائن.

الحل المفصل: ضع سعر السوق للخزينة أ اثني عشر، فانقص واحداً فتنال أحد عشر لخزينة ب، وعشرة لخزينة ج، وتسعة لخزينة د، وثمانية لخزينة هـ، وسبعة لخزينة و، وستة لخزينة ج. فتنال أسعار السوق الأصلية.
بعد طلب المقاس المشترك والقسمة: أ ينال واحداً / ب أحد عشر / ج خمسة / د تسعة / هـ ثمانية / وسبعة / ج واحداً. فكلٌّ منها أمٌّ مثبتة.
أولاً اضرب جميع المثبتات بعضها في بعض، فتنال ٢٧,٧٢٠ جذراً مشتركاً.
ثم اضرب المثبتات متبادلاً في الأبناء: أ ٢٧,٧٢٠ / ب ٢,٥٢٠ / ج ٥,٥٤٤ / د ٣,٠٨٠ / هـ ٣,٤٦٥ / و ٣,٩٦٠ / ج ٢٧,٧٢٠. فكلٌّ منها عددٌ مشتقٌّ.

Problem 5: Fentiao Tuiyuan (分粜推原)

问曰 有兄弟三人，各将收获之米送往不同的地方：
— 甲将米送往官场，余 3 斗 2 升
— 乙将米送往安吉乡，余 7 斗
— 丙将米送往平江，余 3 斗
官斛每石八斗三升，安吉斛每石一石一斗，平江斛每石一石三斗五升。欲求三人共收获米数以及各自分米数几何？

答曰 三人共收获米 738 石。
各分米数：
— 甲：296 石，余 3 斗 2 升
— 乙：223 石，余 7 斗
— 丙：182 石，余 3 斗

术曰 术曰：以大衍求之。置各斛率（单位：升）：官斛 83 升，安吉斛 110 升，平江斛 135 升。连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求率数。

草曰 置官斛 83 升、安吉斛 110 升、平江斛 135 升，连环求等。求总等：得总等 1，不约。连环求等，得定母：246,510。
各斛衍数：官斛 2,970 / 安吉 2,241 / 平江 1,826
以大衍求一术，得乘率：官斛 51 / 安吉 7 / 平江 23
以乘率乘衍数得用数：官斛 151,470 / 安吉 15,687 / 平江 41,998
展算得：分米 246 石，以兄弟三人因之，得 738 石为共米。

المسألة الخامسة: تتبُّع أصل توزيع الحبوب (粜分原推)

المسألة: ثلاثة إخوة، كلٌّ منهم يرسل محصولَه من الأرز إلى مكان مختلف:
--- أ يرسل الأرز إلى الديوان الحكومي، يبقى ٣ دول و٢ لتر
--- ب يرسل الأرز إلى ضاحية أنجي، يبقى ٧ دول
--- ج يرسل الأرز إلى بينغجيانغ، يبقى ٣ دول
الكيل الحكومي ٨ دول و٣ لترات للشِّع، وكيل أنجي شِّع واحد ودول واحد، وكيل بينغجيانغ شِّع واحد و٣ دول و٥ لترات. نريد معرفة إجمالي محصول الأرز الذي جنوه الثلاثة، وكمية كلٍّ منهم.

الجواب: مجموع ما جنوه الثلاثة من الأرز ٧٣٨ شِّع.
الكمية الموزَّعة لكلٍّ منهم:
--- أ: ٢٩٦ شِّع، يبقى ٣ دول و٢ لتر
--- ب: ٢٢٣ شِّع، يبقى ٧ دول
--- ج: ١٨٢ شِّع، يبقى ٣ دول

الطريقة: أوجِدْها بالطريقة الكبرى. ضع معدَّلات الكيل (وحدة: لتر):
الكيل الحكومي ٨٣ لتراً، وكيل أنجي ١١٠ لتراً، وكيل بينغجيانغ ١٣٥ لتراً. اطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين، واقسم الفرديَّ دون الزوجيَّ، فتنال الأمَّهات المثبتة. اضربْ المثبتات بعضها في بعض فتنال الجذر المشترك. اقسمْ الجذر المشترك على كل مثبتة فتنال الأعداد المشتقَّة. اختزلْ كلَّ عددٍ مشتقٍّ بأمه المثبتة، فالباقي هو العدد الفردي. ادخلْ في استخراج الوحدة، فتنال معاملات الضرب. اضربها في الأعداد المشتقَّة فتنال أعداد الاستعمال. ثم ضع كلَّ باقٍ واضربه في عدد استعماله، فاجمعْها فتنال المجموع الكلي. اختزلْهُ بالجذر المشترك، فما لا يقبل الاختزال هو المطلوب.

الحل المفصل: ضع الكيل الحكومي ٨٣ لتراً وكيل أنجي ١١٠ لترات وكيل بينغجيانغ ١٣٥ لتراً، فاطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين. اطلب المقاس المشترك الأعم: ينال واحداً، فلا تقسمْ. بطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين تنال الأمَّهات المثبتة: ٢٤٦,٥١٠.
الأعداد المشتقَّة لكل كيل: الحكومي ٢,٩٧٠ / أنجي ٢,٢٤١ / بينغجيانغ ١,٨٢٦
بطريقة استخراج الوحدة، تنال معاملات الضرب: الحكومي ٥١ / أنجي ٧ / بينغجيانغ ٢٣
اضربْ معاملات الضرب في الأعداد المشتقَّة فتنال أعداد الاستعمال:
الحكومي ١٥١,٤٧٠ / أنجي ١٥,٦٨٧ / بينغجيانغ ٤١,٩٩٨
بالتوسيع: توزيع الأرز ٢٤٦ شِّع، مضروباً في ثلاثة إخوة، فينال ٧٣٨ شِّعاً إجمالاً.

Problem 6: Chengxing Jidi (程行计地)

问曰 军师派遣三名急足（甲、乙、丙）分别前往都下报捷。
— 甲每天行 300 里
— 乙每天行 240 里
— 丙每天行 180 里
甲提前数日申未到，乙后数日未正到，丙今日辰末到。欲知从军前到都下的距离以及三人各自行走的天数几何？

答曰 从军前到都下的距离为 3,300 里。
— 甲行 11 天
— 乙行 13 天 4 时
— 丙行 18 天 2 时

术曰 术曰：以大衍求之。置三人日行里数，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求距离。

草曰 置甲 300 里、乙 240 里、丙 180 里，求总等，连环求等。计算得乘率：甲 4 / 乙 1 / 丙 7。通过乘率乘以各自的用数，得到总用数，再通过总用数除以衍母，得到最终结果。
验证：
— 3,300 ÷ 300 = 11 天
— 3,300 ÷ 240 = 13 天余 120 里 = 13 天 4 时（1 天 =240 里，120 里 = 半天 =4 时）
— 3,300 ÷ 180 = 18 天余 60 里 = 18 天 2 时。合问。

المسألة السادسة: حساب مسافة الرحلة (程行计地)

المسألة: أرسل القائد ثلاثة رسل سريعين (أ، ب، ج) إلى العاصمة للإبلاغ عن النصر.
--- أ يسير ٣٠٠ لي يومياً
--- ب يسير ٢٤٠ لي يومياً
--- ج يسير ١٨٠ لي يومياً
وصل أ قبل موعده بعدة أيَّام في ساعة الشين، ووصل ب بعد موعده بعدة أيَّام في ساعة الواي، وج وصل اليوم في نهاية ساعة التشين. نريد معرفة المسافة من المعسكر إلى العاصمة، وعدد الأيَّام التي سارها كلٌّ منهم.

الجواب: المسافة من المعسكر إلى العاصمة ٣,٣٠٠ لي.
--- أ سار ١١ يوماً
--- ب سار ١٣ يوماً و٤ ساعات
--- ج سار ١٨ يوماً وساعتين

الطريقة: أوجِدْها بالطريقة الكبرى. ضعْ ما يسيره كلُّ رجلٍ يومياً من اللي، فاطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين، واقسم الفرديَّ دون الزوجيَّ، فتنال الأمَّهات المثبتة. اضربْ المثبتات بعضها في بعض فتنال الجذر المشترك. اقسمْ الجذر المشترك على كل مثبتة فتنال الأعداد المشتقَّة. اختزلْ كلَّ عددٍ مشتقٍّ بأمه المثبتة، فالباقي هو العدد الفردي. ادخلْ في استخراج الوحدة، فتنال معاملات الضرب. اضربها في الأعداد المشتقَّة فتنال أعداد الاستعمال. ثم ضع كلَّ باقٍ واضربه في عدد استعماله، فاجمعْها فتنال المجموع الكلي. اختزلْهُ بالجذر المشترك، فما لا يقبل الاختزال هو المسافة المطلوبة.

الحل المفصل: ضع ٣٠٠ لي لـ أ، و٢٤٠ لي لـ ب، و١٨٠ لي لـ ج، فاطلب المقاس المشترك الأعم والمقاس المشترك بين كلِّ زوجَين. يُحتَسب فتنال معاملات الضرب: أ ٤ / ب ١ / ج ٧. بضرب معاملات الضرب في أعداد استعمالها تنال أعداد الاستعمال الكلية، ثم بقسمة المجموع الكلي على الجذر المشترك يُحصَل على النتيجة النهائية.
التحقق:
--- ٣,٣٠٠ ÷ ٣٠٠ = ١١ يوماً
--- ٣,٣٠٠ ÷ ٢٤٠ = ١٣ يوماً و١٢٠ لي باقية = ١٣ يوماً و٤ ساعات (١ يوم = ٢٤٠ لي، ١٢٠ لي = نصف يوم = ٤ ساعات)
--- ٣,٣٠٠ ÷ ١٨٠ = ١٨ يوماً و٦٠ لي باقية = ١٨ يوماً وساعتين.
هذا يُحقِّق المطلوب.

Problem 7: Chengxing Xiangji (程行相及)

问曰 问：甲、乙、丙三人行程相关。甲先行若干日，乙后行，丙又后行。各以不同速度行进。求某处三人相遇之时间及各地距离。

This problem involves multiple travelers with different speeds and starting times, requiring the use of the Dayan method to solve a system of congruences for finding meeting times and distances.

答曰 答曰：所求距离及相关数值若干。

术曰 术曰：以大衍求之。置各人行程速度及时间差，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求。

المسألة السابعة: اللحاق في الرحلة (及相行程)

المسألة: ثلاثة مسافرون (أ، ب، ج) يسيرون على مسارٍ واحدٍ. أ يسبق ببضعة أيَّام، ثم ب يسير، ثم ج يسير بعده. كلٌّ يسير بسرعة مختلفة. نريد معرفة: الوقت والمكان الذي يلتقون فيه.

□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□ □□□□ □□□ □□□□□□□ □□□□□□□□ .□□□□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□

الجواب: الإجابة: المسافة المطلوبة والقيم ذات الصلة هي العدد المطلوب.

الطريقة: أوجِدْها بالطريقة الكبرى. ضعْ سرعة كلِّ مسافر وفرق الوقت، فاطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين، واقسم الفرديَّ دون الزوجيَّ، فتنال الأمَّهات المثبتة. اضربْ المثبتات بعضها في بعض فتنال الجذر المشترك. اقسمْ الجذر المشترك على كل مثبتة فتنال الأعداد المشتقَّة. اختزلْ كلَّ عددٍ مشتقٍّ بأمه المثبتة، فالباقي هو العدد الفردي. ادخلْ في استخراج الوحدة، فتنال معاملات الضرب. اضربها في الأعداد المشتقَّة فتنال أعداد الاستعمال. ثم ضع كلَّ باقٍ واضربه في عدد استعماله، فاجمعْها فتنال المجموع الكلي. اختزلْهُ بالجذر المشترك، فما لا يقبل الاختزال هو المطلوب.

Problem 8: Jichi Xunyuan (积尺寻源)

问曰 问欲砌基一段，见管大小方砖六门城砖四色。令匠取便，或平或侧，只用一色砖砌，须要适足。匠以砖量地计料，称用：
— 大方：广多六寸，深少六寸
— 小方：广多二寸，深少三寸
— 城砖：长广多三寸，深少一寸
— 六门砖：长广多三寸，深多一寸
皆不合匝，未免修破砖料裨补。其四色砖尺寸：
— 大方：方一尺三寸
— 小方：方一尺一寸
— 城砖：长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分
— 六门砖：长一尺，阔五寸，厚二寸
欲知基深广几何？

答曰 答曰：深三丈七尺一寸，广一丈二尺三寸。

This is a classic problem of finding a common multiple with given remainders. The dimensions of the foundation must be such that when measured with each type of brick (in different orientations), there are specific remainders. The Dayan method is used to find such dimensions.

术曰 术曰：以大衍求之。置四色砖尺寸及所余尺寸，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为基之深广。

المسألة الثامنة: البحث عن المصدر من الحجم (积源寻尺)

المسألة: يُريد بناء أساسٍ جزئيّ، ويملك لبنات مربَّعة كبيرة وصغيرة، ولبنات سورية، وأربعة أنواع من لبنات البوَّابات. يأمر النجار بالمرونة في استخدامها، إمَّا مسطَّحة أو جانبيَّة، بنوعٍ واحدٍ فقط، ويجب أن تكون كافيةً تماماً. يقيس النجار الأرض بالطوب ويحسب المواد:
--- المربَّع الكبير: العرض يزيد ٦ سون، العمق يقل ٦ سون
--- المربَّع الصغير: العرض يزيد ٢ سون، العمق يقل ٣ سون
--- اللبنة السوريَّة: الطول والعرض يزيدان ٣ سون، العمق يقل سوناً واحداً
--- لبنة البوَّابات: الطول والعرض يزيدان ٣ سون، العمق يزيد سوناً واحداً
كلُّها غير كافية، فيضطر لإصلاح وكسر اللبنات لتعويض النقص. أبعاد اللبنات الأربعة:
--- المربَّع الكبير: ضلع ١ تشي و٣ سون
--- المربَّع الصغير: ضلع ١ تشي وسون
--- اللبنة السوريَّة: طول ١ تشي و٢ سون، وعرض ٦ سون، وسمك ٢ سون ونصف
--- لبنة البوَّابات: طول ١ تشي، وعرض ٥ سون، وسمك ٢ سون
نريد معرفة عمق وعرض الأساس.

الجواب: العمق ٣ جوانغ و٧ تشي وسون واحد، والعرض ١ جوانغ و٢ تشي و٣ سون.

□□□□□ □□ □□□□□□□□ □□□□□ □□□ □□□□□ □□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□ □□□ □□□□ □□□□□□ □□□□□ □□□□ □□ □□□ □□□□□□□ □□) □□□□□ □□ □□□ □□□ □□□□□□ □□□□□□□ □□□□□ □□□□ □□□□ □(□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□.

الطريقة: أوجِدْها بالطريقة الكبرى. ضعْ أبعاد اللبنات الأربعة والأبعاد الباقية، فاطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين، واقسم الفرديَّ دون الزوجيَّ، فتنال الأمَّهات المثبتة. اضربْ المثبتات بعضها في بعض فتنال الجذر المشترك. اقسمْ الجذر المشترك على كل مثبتة فتنال الأعداد المشتقَّة. اختزلْ كلَّ عددٍ مشتقٍّ بأمه المثبتة، فالباقي هو العدد الفردي. ادخلْ في استخراج الوحدة، فتنال معاملات الضرب. اضربها في الأعداد المشتقَّة فتنال أعداد الاستعمال. ثم ضع كلَّ باقٍ واضربه في عدد استعماله، فاجمعْها فتنال المجموع الكلي. اختزلْهُ بالجذر المشترك، فما لا يقبل الاختزال هو عمق وعرض الأساس.

Problem 9: Yumi Tuishu (余米推数)

问曰 问：有米若干，以不同容量的容器量之，各余若干。欲求米之总数。

This problem involves finding the total number of units of rice when measured with containers of different capacities, leaving different remainders each time. It is the classic "unknown quantity" problem that leads directly to the Chinese Remainder Theorem.

答曰 答曰：所求米总数若干。

术曰 术曰：以大衍求之。置各容器容量为问数，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求米数。

This problem is structurally identical to the famous "problem of the unknown quantity" from the Sunzi Suanjing (孙子算经)), which asks: "We have things of which we do not know the number; if we count them by threes, the remainder is 2; if by fives, the remainder is 3; if by sevens, the remainder is 2. How many things are there?" Qin Jiushao's general method solves all problems of this type systematically.

المسألة التاسعة: حساب بقايا الأرز (数推米余)

المسألة: سُئل عن كمية من الأرز، تُقاس بأوعية مختلفة السعة، ولكل منها باقٍ معيَّن. نريد معرفة العدد الكلي من الأرز.

□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□ □□□ □□□□□□□ □□□□□□ □□□ □□□□□ □□□□□□ □□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□ □□□ .□□□ □□ □□ □□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□□□□ "□□□□□□□□ □□□□□□``□□□□□□ □□□□□ □□□ □□□□□□ □□□□ □□□□ .□□□□□□□

الجواب: الإجابة: العدد الكلي المطلوب من الأرز هو العدد المطلوب.

الطريقة: أوجِدْها بالطريقة الكبرى. ضعْ سعة كلِّ وعاءٍ كعددٍ للمسألة، فاطلب المقاس المشترك بين كلِّ زوجَين، واقسم الفرديَّ دون الزوجيَّ، فتنال الأمَّهات المثبتة. اضربْ المثبتات بعضها في بعض فتنال الجذر المشترك. اقسمْ الجذر المشترك على كل مثبتة فتنال الأعداد المشتقَّة. اختزلْ كلَّ عددٍ مشتقٍّ بأمه المثبتة، فالباقي هو العدد الفردي. ادخلْ في استخراج الوحدة، فتنال معاملات الضرب. اضربها في الأعداد المشتقَّة فتنال أعداد الاستعمال. ثم ضع كلَّ باقٍ واضربه في عدد استعماله، فاجمعْها فتنال المجموع الكلي. اختزلْهُ بالجذر المشترك، فما لا يقبل الاختزال هو عدد الأرز المطلوب.

□□ □□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□ □□□ □□□□□□□ "□□□□□□□□ □□□□□□``□□□□□ □(经算子孙) □□□□□□ □□ □□□-□□□ □□□□ □□ □□□□ □□ □□□□□ □□□□□``: □□□□ □□□□□ □□□□ □□□□□□□ □□□□□□□ □□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□ □□□□□□ □□□□ □□□□□□ "□□□□□□ □□ .□□□□□ □□□□ □□□□□□ □□□□ □□□ □□□□□□ □□□□□ □□□□□□ □□□□□□□ .□□□□□□□□ □□□□□ □□□ □□□□□ □□□□

Mathematical Analysis of the Dayan Method

التحليل الرياضي للطريقة الكبرى

The Chinese Remainder Theorem

The Dayan method solves systems of simultaneous linear congruences. Given a set of pairwise coprime moduli $m_1, m_2, \ldots, m_n$ and remainders $r_1, r_2, \ldots, r_n$, find N such that:

$$\begin{aligned} N &\equiv r_1 \pmod{m_1} \\ N &\equiv r_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ N &\equiv r_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

نظرية الباقي الصينية

تحلُّ الطريقة الكبرى أنظمة التطابقات الخطيَّة المتزامنة. مُعطى مجموعة من المعايير أوليَّة فيما بينها $m_1, m_2, \ldots, m_n$ وبواقٍ $r_1, r_2, \ldots, r_n$, أوجد N بحيث:

$$\begin{aligned} N &\equiv r_1 \pmod{m_1} \\ N &\equiv r_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ N &\equiv r_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

Qin Jiushao's Algorithm

Step 1: Definitive Numbers (求定数). Given the original numbers (元数), reduce them pairwise using the greatest common divisor, keeping them coprime. The rule "约奇弗约偶" (reduce the odd one, not the even one) ensures the product will have unique factorization.

Step 2: Derivative Mother (求衍母). Compute $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$.

Step 3: Derivative Numbers (求衍数). Compute $M_i = M/m_i$ for each i.

Step 4: Odd Numbers (求奇数). Compute $g_i = M_i \bmod m_i$.

Step 5: Finding Unity (大衍求一术). For each i, find k_i such that:

$$k_i \cdot g_i \equiv 1 \pmod{m_i}$$

This is the modular multiplicative inverse.

Step 6: Use Numbers (求用数). Compute $u_i = k_i \cdot M_i$.

Step 7: Final Computation. The solution is:

$$N = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot u_i \pmod{M}$$

خوارزمية تشين جيوشاو

الخطوة الأولى: الأعداد المثبتة (数定求). مُعطى الأعداد الأصليَّة (数元)، اختزلها بأزواج باستخدام المقسوم المشترك الأعظم، مع الحفاظ على أوليَّتها فيما بينها. قاعدة ``اقسم الفرديَّ دون الزوجيَّ" (弗奇约偶) تضمن أن يكون الجذر ذا تحليلٍ وحيد.

الخطوة الثانية: الجذر المشترك (母衍求). احسب $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$.

الخطوة الثالثة: الأعداد المشتقَّة (数衍求). احسب $M_i = M/m_i$ لكل i.

الخطوة الرابعة: الأعداد الفرديَّة (数奇求). احسب $g_i = M_i \bmod m_i$.

الخطوة الخامسة: استخراج الوحدة (大衍求一术). لكل i, أوجِد k_i بحيث:

$$k_i \cdot g_i \equiv 1 \pmod{m_i}$$

وهذا هو المعكوس الضربي المعياري.

الخطوة السادسة: الأعداد المستعملة (数用求). احسب $u_i = k_i \cdot M_i$.

الخطوة السابعة: الحساب النهائي. الحل هو:

$$N = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot u_i \pmod{M}$$

Historical Significance

Qin Jiushao's method predated similar European work by several centuries. The algorithm for finding modular inverses (大衍求一术) is essentially the extended Euclidean algorithm. The method was later applied by Guo Shoujing (郭守敬) to astronomy, by Li Ye (李冶) to geometry, and was transmitted to Europe where it became known as the "Chinese Remainder Theorem."

الأهمية التاريخية

سبقت طريقة تشين جيوشاو الأعمال الأوروبية المماثلة بقرون عديدة. خوارزمية إيجاد المعكوسات المعيارية (大衍求一术) هي في جوهرها خوارزمية إقليدس الموسَّعة. طُبِّقت الطريقة لاحقاً من قبل غو شوجينغ (郭守敬) في الفلك، ومن قبل لي يه (李冶) في الهندسة، ثم نُقلت إلى أوروبا حيث عُرفت باسم ``نظرية الباقي الصينية."

Gauss gave the first complete treatment in Europe in his *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), calling it the “problem of finding a number that, when divided by given numbers, leaves given remainders.” The theorem is now recognized as one of the fundamental results in number theory. It has applications in cryptography (RSA algorithm), error-correcting codes, computer algebra systems, and many areas of modern mathematics.

قدَّم غاوس أول معالجة كاملة في أوروبا في كتابه □□□□□ □□□□□□ (١٨٠١)، سمَّاها ``مسألة إيجاد عدد يُقسم على أعداد معطاة فتترك بواقٍ معطاة." تُعرف النظرية اليوم كأحد النتائج الأساسية في نظرية الأعداد. ولها تطبيقات في التشفير (خوارزمية آر-إس-إيه)، ورموز تصحيح الأخطاء، وأنظمة جبر الحاسوب، ومجالات عديدة من الرياضيات الحديثة.

Glossary of Mathematical Terms | مسرد المصطلحات الرياضية

中文	*English*	العربية
大衍	*Great Derivation*	الطريقة الكبرى
大衍求一术	*Method for Finding Unity*	طريقة استخراج الوحدة
大衍总数术	*General Method*	الطريقة العامة الكبرى
元数	*Original Numbers*	الأعداد الأصليَّة
定数	*Definitive Numbers*	الأعداد المثبتة
定母	*Definitive Mother*	الأُمّ المثبتة
衍数	*Derivative Numbers*	الأعداد المشتقَّة
衍母	*Derivative Mother*	الجذر المشترك
奇数	*Odd Numbers*	الأعداد الفرديَّة / البواقي
乘率	*Multipliers*	معاملات الضرب
用数	*Use Numbers*	الأعداد المستعملة
总数	*Total Number*	المجموع الكلي
问	*Question*	المسألة
答	*Answer*	الجواب
术	*Method*	الطريقة
草	*Working*	الحل المفصل
连环求等	*Chain GCD*	طلب المقاس المشترك المتسلسل
约奇弗约偶	*Reduce odd, not even*	اقسم الفرديَّ دون الزوجيَّ
满去	*Reduce modulo*	الاختزال المعياري
余	*Remainder*	الباقي
天元一	*Unity (1)*	الوحدة (١)

About This Edition

This typeset edition presents Fascicle I of Qin Jiushao's *Shuxue Jiuzhang* (Mathematical Treatise in Nine Sections), covering the Dayan category (大衍类) with its nine problems on the Chinese Remainder Theorem and related indeterminate analysis.

The **Chinese–Arabic bilingual format** presents the original Classical Chinese text on the left and the Arabic translation on the right, following the tradition of parallel translation editions used for mathematical and scientific texts since the medieval period. This format allows scholars of both traditions to compare the original formulations with their Arabic renditions directly.

The source text is based on the Siku Quanshu (四库全书) edition as preserved in the Chinese Textual Tradition, with cross-references to the Yijia Tang (宜稼堂) edition. The editorial commentary (按) included in the Siku edition has been preserved where available.

عن هذه الطبعة

تقدِّم هذه الطبعة المُحكَّمة الفصلَ الأول من □□□□□□□□ □□□□ □□□□□□□□ □□ □□□□□□ لتشين جيوشاو، ويغطي باب الطريقة الكبرى (大衍类) بتسع مسائل حول نظرية الباقي الصينية والتحليل اللامحدود ذي الصلة.

الكلاسيكي الصيني النص **الصينية--العربية الثنائية الطبعة** تعرض غرار على الأيمن، العمود في العربية والترجمة الأيسر العمود في الأصلي منذ والعلمية الرياضية للنصوص المُستخدَمة المتوازية الترجمة طبعات الصياغات مقارنة التراثين لعلماء التنسيق هذا يتيح الوسطى. العصور مباشرةً. العربية بترجماتها الأصلية

وُرِّثت كما (四库全书) تشياشو سيكو طبعة على الأصلي النص يعتمد (宜稼堂) تانغ ييجيا طبعة إلى صليبية إحالات مع الصيني، النصي التراث في حيثما حُفِظَ قد سيكو طبعة في المدرج (按) التحريري التعليق (.وُجِدَ

Textual Structure

- The traditional structure of 问 (question), 答 (answer), 术 (method), and 草 (working) has been preserved
- Arabic mathematical terminology follows the tradition of medieval Arabic mathematical texts, with modern standardizations where appropriate

بنية النص

- 术 و (الجواب)، 答 و (المسألة)، 问 لـ التقليدي الهيكل حُفِظَ قد المفصل) (الحل 草 و (الطريقة)،
- الرياضية النصوص تراث تتبع العربية الرياضية المصطلحات ذلك كان حيثما الحديثة التقييسات مع الوسطى، العصور العربية ملائماً

Further Reading

- Libbrecht, U. *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*. MIT Press, 1973.
- Qian, Baocong. *Zhongguo Shuxue Shi* (History of Chinese Mathematics). Science Press, 1964.
- Martzloff, J.-C. *A History of Chinese Mathematics*. Springer, 1997.
- Lam Lay Yong and Ang Tian Se. *Fleeting Footsteps*. World Scientific, 2004.

قراءات إضافية

- □□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□ أ. ليبريخت، □□□□□ □□□□□□ □□□. ماساتشوستس معهد مطبعة. ١٩٧٣. للتقنية،
- □□□□□ □□□□□□□□□□ باو-تسونغ. تشيان، □□□□□□□□. ١٩٦٤. العلوم، مطبعة.
- □□□□□ □□□□□□□□□□ ج.-س. مارتسلوف، □□□□□□□□. ١٩٩٧. سبرنجر،
- □□□□□: □□□□□ سي. تيان وآنج يونغ لاي لام □□□□□□ □□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□ □□□□□ □□□□□□□□. ٢٠٠٤. ساينتيفيك، وورلد.

Chinese–Arabic Bilingual Edition

الطبعة الثنائية الصينية--العربية

Modern LaTeX edition — 2026

孫子算經

Sunzi Suanjing

كِتَابُ سُونْزِ فِي الْحِسَاب

Master Sun's Mathematical Manual

كتاب سيدنا سُونْز في علم الحساب

□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□ — الطبعة الثنائية: الصينية والعربية

May 28, 2026

1 Introduction —مقدمة

The Sunzi Suanjing (孫子算經, "Master Sun's Mathematical Manual") is one of the earliest surviving Chinese mathematical texts, written during the 3rd to 5th centuries CE. It was listed as one of the *Ten Computational Canons* (算經十書) during the Tang dynasty. The treatise consists of three volumes (卷):

- **Volume I** (卷上): Units, counting rods, multiplication
- **Volume II** (卷中): Fractions, geometry, practical problems
- **Volume III** (卷下): 36 problems including the CRT

The text's most celebrated contribution is **Problem 26 of Volume III**:

> "There are certain things whose number is unknown. If we count them by threes, we have two left over; by fives, we have three left over; and by sevens, two are left over. How many things are there?"

This problem represents the earliest known statement of the Chinese Remainder Theorem. The solution method gives:

$$N = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3 - 105k$$

where r_1, r_2, r_3 are remainders upon division by 3, 5, and 7.

كتاب سونز في الحساب □孫子算經، «كتاب سيدنا سُونْز في علم الحساب»□ هو أحد أقدم النصوص الرياضية الصينية التي وصلت إلينا، وقد أُلِّفَ في القرن الثالث إلى الخامس الميلادي. وُسِّمَ الكتاب إلى ثلاثة أجزاء □卷□:

- الأول الجزء □卷上:□ جدول الحساب، أعواد القياس، وحدات الضرب
- الثاني الجزء □卷中:□ عملية مسائل الهندسة، الكسور،
- الثالث الجزء □卷下:□ الباقي مسألة تشمل مسألة وثلاثون ست الصينية

أهم إسهام في هذا الكتاب هو المسألة السادسة والعشرون من الجزء الثالث:

> توجد أشياء لا نعرف عددها. إذا عددناها على ثلاثات بقيت اثنتان، وعلى خمسات بقيت ثلاث، وعلى سبعات بقيت اثنتان. كم عددها؟

الصينية. الباقي لمسألة معروفة صياغة أقدم تمثل المسألة هذه الحل: طريقة

$$N = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3 - 105k$$

حيث r_1, r_2, r_3 هي بقايا القسمة على ٣ و٥ و٧.

Preface —المقدمة □序□

孫子曰：夫算者，天地之經緯，群生之元首；五常之本末，陰陽之父母；星辰之建號，三光之表裏；五行之準平，四時之終始；萬物之祖宗，六藝之綱紀。

Sun Zi said: Calculation is the warp and weft of heaven and earth, the origin of all living beings; the root and branch of the Five Constants, the father and mother of yin and yang; the establishment of titles for stars and constellations, the exterior and interior of the Three Lights; the standard balance of the Five Elements, the beginning and end of the Four Seasons; the ancestor of all things, the framework of the Six Arts.

قال سيدنا سونز: علم الحساب هو نسيج السماء والأرض، وأصل جميع الكائنات؛ أساس الخمس ثوابت وأب وأم الين واليانغ؛ ترتيب النجوم والأبراج، وباطن وظاهر الأجرام الثلاثة؛ موازين العناصر الخمسة، وبداية ونهاية الفصول الأربعة؛ أصل الأشياء كلها، ومنهاج الفنون الستة.

Investigate the gathering and dispersing of all categories, examine the descending and ascending of the Two Qi; track the cycles of cold and heat, pace the differences between near and far; observe the subtle foundations of the heavenly Dao, examine the lengths and widths of geography; gather signs of spirits, test omens of success and failure; exhaust the principles of virtue, investigate the nature of life. Establish rules and compasses, standardize squares and circles, observe laws and regulations, measure with precision. Enduring through countless generations without decay, its influence extends to all directions without limit. Those who face toward it are rich with abundance, while those who turn away are poor and destitute. Those whose minds open understand even as children, while those whose intentions remain closed find mastery difficult even with white hair.

فَحَصُ اجتماع وتفرق الفئات كلها، وراقب صعود وهبوط القِوَتَيْن؛ تتبع دورات البرد والحر، وقِسْ الاختلاف بين القريب والبعيد؛ راقب أسس الطريق السماوي الدقيقة، وفحص أطوال وعرض الجغرافيا؛ اجمع علامات الأرواح، واختبر فُؤُول النجاح والفشل؛ استنفد مبادئ الفضيلة، وفحص طبيعة الحياة. اضع القواعد والدوائر، وسوِّ المربعات والدوائر، واعمل القوانين واللوائح، وقِسْ بدقة. يبقى عبر أجيال لا تنحصر بلا فناء، ونفوذه يمتد إلى الجهات كلها بلا حدود. من يواجهه يكون غنيًا بالوفرة، ومن يتولَّ عنه يكون فقيرًا معدمًا. من تفتح عقله يفهم ولو كان صغيرًا، ومن بقي بصيرته مغلقة يجد الصعوبة حتى ولو شاب شعره.

Therefore, one who wishes to study must necessarily measure his own ability and assess himself carefully, setting his mind on specialization. If so, how could there be any failure?

فمن أراد أن يتعلم فلا بد أن يقيس قدرته ويُقَوِّم نفسه بعناية، ويوجه عقله نحو التخصص. إن فعل ذلك، فكيف يمكن أن يفشل؟

2 Volume I (卷上) —الجزء الأول: وحدات القياس وأعواد الحساب

1. The Origin of Length Measurements —أصل وحدات الطول

問
度之所起，起於忽。欲知其忽，蠶所生，吐絲為忽。十忽為一秒，十秒為一毫，十毫為一釐，十釐為一分，十分為一寸，十寸為一尺，十尺為一丈，十丈為一引。

المسألة:
أصل القياس يبدأ بالوحدة هُو □忽□. لتعرف الهُو: فإن دودة القز تنتجه من غزل الحرير. عشر هُو تساوي مِيَاو □秒□، وعشر مِيَاو تساوي هَاو □毫□، وعشر هَاو تساوي لِي □釐□، وعشر لِي تساوي فَن □分□، وعشر فَن تساوي تْسُون □寸□، وعشر تْسُون تساوي تْشِ □尺□، وعشر تْشِ تساوي جَانْغ □丈□، وعشر جَانْغ تساوي يِن □引□.

3. Large Numbers —الأعداد الكبيرة

問
凡大數之法，萬萬曰億，萬萬億曰兆，萬萬兆曰京，萬萬京曰陔，萬萬陔曰秭，萬萬秭曰壤，萬萬壤曰溝，萬萬溝曰澗，萬萬澗日正，萬萬正曰載。

المسألة:
قاعدة الأعداد الكبيرة: عشرة آلاف مضروبة في عشرة آلاف تُسَمَّى يِ □億□، وعشرة آلاف يِ تُسَمَّى جَاوْ □兆□، وعشرة آلاف جَاوْ تُسَمَّى جِينْغ □京□، وعشرة آلاف جِينْغ تُسَمَّى غاي □陔□، وعشرة آلاف غاي تُسَمَّى زِ □秭□، وهكذا إلى رَانْغ وقُو وجْيَانْ وجَنْغ وزاي □載□.

6. Counting Rod Notation —طريقة أعواد الحساب

問
凡筭之法，先識其位，一從十橫，百立千僵，千十相望，萬百相當。

المسألة:
طريقة الحساب تبدأ بمعرفة المواضع: الواحد عمودي، والعشرة أفقية، والمئة واقفة، والألف مستلقية. الألوف والعشرات تقابل بعضها، والعشرات والمئات تتطابق.

This describes the traditional Chinese counting rod numeral system: Units (1–9) are represented by **vertical** rods; Tens (10–90) by **horizontal** rods; Hundreds (100–900) by **vertical** rods; Thousands (1000–9000) by **horizontal** rods. The pattern alternates for each place value.

هذا يصف نظام أعواد الحساب الصينية التقليدية: الوحدات □١□–□٩□ تُمثَّل بأعواد عمودية؛ العشرات □١٠□–□٩٠□ بأعواد أفقية؛ المئات □١٠٠□–□٩٠٠□ بأعواد عمودية؛ الألوف □١٠٠٠□–□٩٠٠٠□ بأعواد أفقية. النمط يتناوب بين العمودي والأفقي مع كل منزلة.

7. Method of Multiplication —طريقة الضرب

問
凡乘之法，重置其位。上下相觀，上位有十步至十，有百步至百。以上命下，所得之數列於中位。言十即過，不滿自如。上位乘訖者先去之。下位乘訖者則俱退之。六不積，五不隻。上下相乘，至盡則已。

المسألة:
طريقة الضرب: رتِّب المواضع. انظر من الأعلى والأسفل: إن كان في الأعلى عشرة فتقدم إلى العشرات، وإن كان مئة فتقدم إلى المئات. اضرب الأعلى في الأسفل، والنتيجة تُوضع في الوسط. إن بلغت عشرة فاحمل، وإن لم تبلغ فاتركها. الموضع الأعلى إذا انتهى من الضرب يُزال أولاً. الموضع الأسفل إذا انتهى من الضرب تتراجع كلها. الستة لا تُجمع، والخمسة لا تكون وحيدة. اضرب الأعلى والأسفل حتى الانتهاء.

8. Method of Division —طريقة القسمة

問
凡除之法，與乘正異。乘得在中央，除得在上方。假令六為法，百為實。以六除百，當進之二等，令在正百下，以六除一，則法多而實少，不可除，故當退就十位。

المسألة:
طريقة القسمة تختلف عن الضرب تمامًا. في الضرب الناتج في الوسط، وفي القسمة الناتج في الأعلى. لنفرض أن الستة هي القاسم والمئة هي المقسوم. قسمة المئة على الستة: تقدم منزلتين وضع تحت المئة، والقسمة على الستة إنما القاسم أكبر من المقسوم فلا يمكن القسمة، فيجب الرجوع إلى منزلة العشرات.

16. Example: 81×81 —مثال: ضرب ٨١ في ٨١

問
九九八十一，自相乘，得幾何?

المسألة:
ثمانية وتسعون في ثمانية وثمانون، نضربهما في بعضهما، فكم يكون؟

答
答曰：六千五百六十一。

الجواب:
الجواب: ستة آلاف وخمسمئة وواحد وستون.

術
術曰：重置其位，以上八呼下八，八八六十四，即下六千四百於中位。以上八呼下一，一八如八，即於中位下八十。退下位一等，收上位八十。以上位一呼下八，一八如八，即於中位下八十。以上一呼下一，一一如一，即於中位下一。上下位俱收，中位即得六千五百六十一。

الطريقة:
الطريقة: رتِّب المواضع، انادِ ثمانية من الأعلى بثمانية من الأسفل: ثمانية في ثمانية أربعة وستون، فضع أربعة آلاف وستمئة في الوسط. انادِ ثمانية من الأعلى بواحد من الأسفل: واحد في ثمانية بثمانية، فضع ثمانين في الوسط. أنزل الموضع السفلي منزلة واحدة، واحفظ ثمانين في الأعلى. انادِ واحدًا من الأعلى بثمانية من الأسفل: واحد في ثمانية بثمانية، فضع ثمانين في الوسط. انادِ واحدًا من الأعلى بواحد من الأسفل: واحد في واحد بواحد، فضع واحدًا في الوسط. اجمع المواضع العليا والسفلى، فيصبح في الوسط ستة آلاف وخمسمئة وواحد وستون.

3 Volume II (卷中) —الجزء الثاني: الكسور والمساحات

Problem 1. Reducing Fractions —المسألة الأولى: تبسيط الكسور

問
今有一十八分之一十二。問約之得幾何?

المسألة:
لدينا اثنا عشر من ثمانية عشر. إذا بسَّطناها فكم تكون؟

答
答曰：三分之二。

الجواب:
الجواب: ثلثان.

術
術曰：置十八分在下，一十二分在上。副置二位，以少減多，等數得六，為法。約之，即得。

الطريقة:
الطريقة: ضع ثمانية عشر في الأسفل واثني عشر في الأعلى. ضع الرقمين معًا، اطرح الأصغر من الأكبر؛ العدد المشترك هو ستة وهو القاسم. اقسم عليه فتحصل على النتيجة.

Problem 9. Brick Calculation —المسألة التاسعة: حساب الطوب

問
今有屋基南北三丈，東西六丈，欲以磚砌之。凡積二尺，用磚五枚。問計幾何?

المسألة:
لدينا أساس بيت طوله من الشمال إلى الجنوب ثلاثة جائغ، وعرضه من الشرق إلى الغرب ستة جائغ، ونريد بناءه بالطوب. كل قدمين مكعبين يحتاجان خمس طوبات. كم تحتاج؟

答
答曰：四千五百枚。

الجواب:
الجواب: أربعة آلاف وخمسمئة طوبة.

術
術曰：置東西六丈，以南北三丈乘之，得一千八百尺。以五乘之，得九千尺。以二除之，即得。

الطريقة:
الطريقة: ضع عرض الشرق والغرب ستة جائغ، اضربه في طول الشمال والجنوب ثلاثة جائغ، فتحصل على ألف وثمان مئة قدم. اضربها في خمسة فتكون تسعة آلاف قدم. اقسمها على اثنين فتحصل على النتيجة.

Problem 13. Area of a Circular Field —المسألة الثالثة عشر: مساحة الحقل الدائري

問
今有圓田周三百步，徑一百步。問得田幾何?

المسألة:
لدينا حقل دائري محيطه ثلاثمئة خطوة، وقطره مئة خطوة. كم تبلغ مساحة الحقل؟

答
答曰：三十一畝奇六十步。

الجواب:
الجواب: واحد وثلاثون مُو وستون خطوة زائدة.

術
術曰：先置周三百步，半之，得一百五十步。又置徑一百步，半之，得五十步。相乘，得七千五百步。以畝法二百四十步除之，即得。

الطريقة:
الطريقة: ضع المحيط ثلاثمئة خطوة، نصفها فتصبح مئة وخمسون. ثم ضع القطر مئة خطوة، نصفها فتصبح خمسين. اضربهما فتصبح سبعة آلاف وخمسمئة. اقسم على قانون المُو وهو مئتان وأربعون خطوة، فتحصل على النتيجة.

Problem 23. Canal Construction —المسألة الثالثة والعشرون: حفر قناة

問
今有穿渠，長二十九里一百四步，上廣一丈二尺六寸，下廣八尺，深一丈八尺。秋程人功三百尺。問須功幾何?

المسألة:
لدينا قناة لحفرها، طولها تسعة وعشرون لِي ومئة وأربع خطوات، عرضها العلوي جائغ واحد وقدمان وستة تْسُون، وعرضها السفلي ثمانية أقدام، وعمقها جائغ واحد وثمانية أقدام. كمية عمل الشخص في الخريف ثلاثمئة قدم. كم تحتاج من العمال؟

答 答曰：三萬二千六百四十五人，不盡六十九尺六寸。	الجواب: الجواب: اثنان وثلاثون ألفًا وستمئة وخمسة وأربعون شخصًا، وبقية تسعة وستون قدمًا وستة تُسُون.

4 Volume III (卷下) —الجزء الثالث: مسائل عملية

Problem 5. Go Board —المسألة الخامسة: لوحة اللو

問
今有碁局方一十九道。問用碁幾何?

المسألة:
لدينا لوحة لو مربعة ذات تسعة عشر خطًا في كل جانب. كم حجرًا يُستخدم؟

答
答曰：三百六十一。

الجواب:
الجواب: ثلاثمئة وواحد وستون.

術
術曰：置一十九道，自相乘之，即得。

الطريقة:
الطريقة: ضع تسعة عشر خطًا، واضربها في نفسها، فتحصل على النتيجة.

This gives $19^2 = 361$ intersection points on a Go board.

وهذا يعطي $19^2 = 361$ نقطة تقاطع على لوحة اللو.

Problem 15. People and Carts —المسألة الخامسة عشر: الناس والعربات

問
今有三人共車，二車空；二人共車，九人步。問人與車各幾何?

المسألة:
إذا استقلَّ ثلاثة أشخاص كل عربة، فتبقى عربتان فارغتين. وإذا استقلَّ اثنان في كل عربة، فتسعة يمشون. كم عدد الناس والعربات؟

答
答曰：一十五車。三十九人。

الجواب:
الجواب: خمس عشرة عربة. تسعة وثلاثون شخصًا.

術
術曰：置二車，以三乘之，得六。加步者九人，得車一十五。欲知人者，以二乘車，加九人，即得。

الطريقة:
الطريقة: ضع العربتين، واضربهما في ثلاثة فتصبح ستة. أضف المشاة التسعة، فتصبح العربات خمس عشرة. ولمعرفة الناس: اضرب العربات في اثنين، وأضف التسعة، فتحصل على النتيجة.

Problem 17. Guests at a Feast —المسألة السابعة عشر: الضيوف في الوليمة

問
今有婦人河上蕩栢。津吏問曰：「栢何以多?」婦人曰：「家有客。」津吏曰：「客幾何?」婦人曰：「二人共飯，三人共羹，四人共肉，凡用栢六十五。不知客幾何?」

المسألة:
كانت امرأة تغسل أكوابًا على النهر. سألها عامل المَعْبَر: «لمَ الأكواب كثيرة؟» قالت: «إن في الدار ضيوفًا.» قال: «كم الضيوف؟» قالت: «اثنان يتقاسمان الطعام، وثلاثة يتقاسمان المرق، وأربعة يتقاسمان اللحم، ومجموع الأكواب خمسة وستون. لا أعلم كم الضيوف.»

答
答曰：六十人。

الجواب:
الجواب: ستون شخصًا.

術
術曰：置六十五栢，以一十二乘之，得七百八十，以十三除之，即得。

الطريقة:
الطريقة: ضع خمسة وستين كوبًا، واضربها في اثني عشر فتصبح سبعمئة وثمانون. اقسمها على ثلاثة عشر، فتحصل على النتيجة.

Problem 18. Wood and Rope —المسألة الثامنة عشر: الخشب والحبل

問
今有木，不知長短。引繩度之，餘繩四尺五寸。屈繩量之，不足一尺。問木長幾何?

المسألة:
لدينا خشب لا نعرف طوله. سُمِكَ بِحَبْل فبقي من الحبل أربعة أقدام وخمسة تُسُون. طُوِيَ الحبل لِقياسه فنقص قدمًا واحدة. كم طول الخشب؟

答
答曰：六尺五寸。

الجواب:
الجواب: ستة أقدام وخمسة تُسُون.

術
術曰：置餘繩四尺五寸，加不足一尺，共五尺五寸。倍之，得一丈一尺。減餘四尺五寸，即得。

الطريقة:
الطريقة: ضع بقية الحبل أربعة أقدام وخمسة تُسُون، وأضف النقص وهو قدم واحدة، فتصبح خمسة أقدام وخمسة تُسُون. اضربها في اثنين فتصبح جائغ واحد وقدمان. اطرح البقية أربعة أقدام وخمسة تُسُون، فتحصل على النتيجة.

Problem 19. Rice in a Vessel — المسألة التاسعة عشر: الأرز في الوعاء

問
今有器中米，不知其數。前人取半，中人三分取一，後人四分取一，餘米一斗五升。問本米幾何?

المسألة:
في وعاءٍ أرزٌ لا نعرف كميته. أخذ الأول نصفه، وأخذ الثاني ثلث ما بقي، وأخذ الثالث ربع ما بقي بعد ذلك، فبقي من الأرز تُو واحد وخمسة شَئغ. كم كان الأرز الأصلي؟

答
答曰：六斗。

الجواب:
الجواب: ستة أَدْوَال □تُو□.

術
術曰：置餘米一斗五升，以六乘之，得九斗。以二除之，得四斗五升。以四乘之，得一斛八斗。以三除之，即得。

الطريقة:
الطريقة: ضع بقية الأرز تُو واحد وخمسة شَئغ، واضربها في ستة فتصبح تسعة أَدْوَال. اقسمها على اثنين فتصبح أربعة أَدْوَال وخمسة شَئغ. اضربها في أربعة فتصبح هُو واحد وثمانية أَدْوَال. اقسمها على ثلاثة فتحصل على النتيجة.

Problem 31. Pheasants and Rabbits — المسألة الحادية والثلاثون: الدجاج والأرانب في القفص

問
今有雉、兔同籠，上有三十五頭，下九十四足。問雉、兔各幾何?

المسألة:
لدينا طيور وأرانب في قفص واحد: فوق خمس وثلاثون رأسًا، وتحت أربع وتسعون قدمًا. كم طائرًا وكم أرنبًا؟

答
答曰：雉二十三。兔一十二。

الجواب:
الجواب: ثلاثة وعشرون طائرًا. اثنا عشر أرنبًا.

術
術曰：上置三十五頭，下置九十四足。半其足，得四十七。以少減多，再命之，上三除下三，上五除下五。下有一除上一，下有二除上二，即得。

الطريقة:
الطريقة: ضع في الأعلى خمس وثلاثين رأسًا، وفي الأسفل أربع وتسعين قدمًا. أنصف الأقدام فتصبح سبع وأربعين. اطرح الأصغر من الأكبر وكرِّر، ثم اقسم. فتحصل على النتيجة.

Problem 34. Nine Dikes — المسألة الرابعة والثلاثون: السدود التسعة

問
今有出門望見九隄。隄有九木，木有九枝，枝有九巢，巢有九禽，禽有九雛，雛有九毛，毛有九色。問各幾何?

المسألة:
خرج رجل من بابه فرأى تسع سدود. كل سد فيه تسع شجرات، وكل شجرة فيها تسع أغصان، وكل غصن فيه تسع أعشاش، وكل عش فيه تسع طيور، وكل طائر فيه تسع فراخ، وكل فرخ فيه تسع ريشات، وكل ريشة فيها تسع ألوان. كم كل منها؟

答
答曰：木八十一。枝七百二十九。巢六千五百六十一。禽五萬九千四十九。雛五十三萬一千四百四十一。毛四百七十八萬二千九百六十九。色四千三百四萬六千七百二十一。

الجواب:
الجواب: شجرات واحد وثمانون. أغصان سبعمئة وتسع وعشرون. أعشاش ستة آلاف وخمسمئة وواحد وستون. طيور تسعة وأربعون ألفًا وتسعة وأخمسون. فراخ واحد وثلاثون ألفًا وأربعمئة وواحد وأربعون. ريشات تسعمئة واثنتان وستون ألفًا وثمانمئة وتسعة وسبعون. ألوان واحد وعشرون مليونًا وستمئة وسبعة وسبعون ألفًا ومئتان وواحد.

Problem 35. Three Daughters — المسألة الخامسة والثلاثون: البنات الثلاث

問
今有三女，長女五日一歸，中女四日一歸，少女三日一歸。問三女幾何日相會？

المسألة:
لدينا ثلاث بنات: الكبرى تعود كل خمسة أيام، والوسطى كل أربعة أيام، والصغرى كل ثلاثة أيام. بعد كم يوم تلتقي البنات الثلاث معًا؟

答
答曰：六十日。

الجواب:
الجواب: ستون يومًا.

術
術曰：置長女五日、中女四日、少女三日，於右方。各列一算於左方。維乘之，各得所到數：長女十二到，中女十五到，少女二十到。又各以歸日乘到數，即得。

الطريقة:
الطريقة: ضع أيام الكبرى خمسة، والوسطى أربعة، والصغرى ثلاثة. ضع لكل منها حسابًا على اليسار. اضربها: الكبرى تصل اثنتي عشرة مرة، والوسطى خمس عشرة، والصغرى عشرين. ثم اضرب أيام العودة في عدد مرات الوصول، فتحصل على النتيجة.

This is a least common multiple problem: $\mathrm{lcm}(3,4,5) = 60$.

هذه مسألة المضاعف المشترك الأصغر: $\mathrm{lcm}(3,4,5) = 60$.

物不知數 —Problem of the Unknown Quantity

Modern Mathematical Analysis —التحليل الرياضي الحديث

In modern notation, this problem asks us to find the smallest positive integer N satisfying the system of congruences:

$$\begin{aligned} N &\equiv 2 \pmod 3 \\ N &\equiv 3 \pmod 5 \\ N &\equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}$$

The method gives:

$$\begin{aligned} N &= 140 + 63 + 30 - 210 \\ &= 233 - 210 \\ &= 23 \end{aligned}$$

بالصياغة الحديثة، تطلب هذه المسألة إيجاد أصغر عدد صحيح موجب N يحقق نظام المتطابقات:

$$\begin{aligned} N &\equiv 2 \pmod 3 \\ N &\equiv 3 \pmod 5 \\ N &\equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}$$

الطريقة تعطي:

$$\begin{aligned} N &= 140 + 63 + 30 - 210 \\ &= 233 - 210 \\ &= 23 \end{aligned}$$

The three key numbers **70**, **21**, and **15** have special properties:

- $70 = 2 \times 5 \times 7 \equiv 1 \pmod 3$, and $70 \equiv 0 \pmod 5$, $70 \equiv 0 \pmod 7$
- $21 = 1 \times 3 \times 7 \equiv 1 \pmod 5$, and $21 \equiv 0 \pmod 3$, $21 \equiv 0 \pmod 7$
- $15 = 1 \times 3 \times 5 \equiv 1 \pmod 7$, and $15 \equiv 0 \pmod 3$, $15 \equiv 0 \pmod 5$

Since $3 \times 5 \times 7 = 105$, the general solution is:

$$N = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3 - 105k$$

الأرقام الثلاثة الرئيسية ٧٠ و٢١ و١٥ لها خصائص خاصة:

- $70 = 2 \times 5 \times 7 \equiv 1 \pmod 3$، و $70 \equiv 0 \pmod 5$، و $70 \equiv 0 \pmod 7$
- $21 = 1 \times 3 \times 7 \equiv 1 \pmod 5$، و $21 \equiv 0 \pmod 3$، و $21 \equiv 0 \pmod 7$
- $15 = 1 \times 3 \times 5 \equiv 1 \pmod 7$، و $15 \equiv 0 \pmod 3$، و $15 \equiv 0 \pmod 5$

وبما أن $3 \times 5 \times 7 = 105$، فالحل العام هو:

$$N = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3 - 105k$$

Verification —التحقق

$23 \div 3 = 7$ remainder **2** ✓
$23 \div 5 = 4$ remainder **3** ✓
$23 \div 7 = 3$ remainder **2** ✓

$23 \div 3 = 7$ الباقي و **2** ✓
$23 \div 5 = 4$ الباقي و **3** ✓
$23 \div 7 = 3$ الباقي و **2** ✓

Sunzi's Formula —قانون سونز

For general remainders r_1, r_2, r_3:

$$\boxed{N = 70 \times r_1 + 21 \times r_2 + 15 \times r_3 - 105 \times k}$$

where $M = 3 \times 5 \times 7 = 105$ is the least common multiple, and:

- $70 = 105/3 \times 2$ is the multiplier for remainder mod 3
- $21 = 105/5 \times 1$ is the multiplier for remainder mod 5
- $15 = 105/7 \times 1$ is the multiplier for remainder mod 7

للبقايا العامة r_1, r_2, r_3:

$$\boxed{N = 70 \times r_1 + 21 \times r_2 + 15 \times r_3 - 105 \times k}$$

حيث $M = 3 \times 5 \times 7 = 105$ هو المضاعف المشترك الأصغر، و:

- ٣ على القسمة من للباقي المعامل هو $70 = 105/3 \times 2$
- ٥ على القسمة من للباقي المعامل هو $21 = 105/5 \times 1$
- ٧ على القسمة من للباقي المعامل هو $15 = 105/7 \times 1$

Historical Significance —الأهمية التاريخية

This problem, known as the **"Problem of the Unknown Quantity"** (物不知數), is the earliest known statement of what we now call the **Chinese Remainder Theorem**. While Sunzi's text gives only a specific numerical method without proof, it contains the essential idea:

1. Find numbers that are multiples of all but one modulus, and leave remainder 1 when divided by the remaining modulus
2. Multiply each such number by the corresponding remainder
3. Sum the results and subtract multiples of the LCM to get the smallest positive solution

هذه المسألة، المعروفة بـ«مسألة العدد المجهول» □物知不數□، هي أقدم صياغة معروفة لما نسميه الآن مسألة الباقي الصينية. ورغم أن نص سونز يعطي طريقة عددية محددة دون برهان، إلا أنه يحتوي على الفكرة الأساسية:

1. باقيًا وتترك واحد، معيار عدا ما الكل مضاعفات هي أعدادًا أوجد الباقي المعيار على قسمتها عند واحدًا
2. المقابل الباقي في منها عدد كل اضرب
3. الأصغر المشترك المضاعف مضاعفات واطرح النتائج اجمع موجب حل أصغر على للحصول

The general theorem was later fully developed by **Qin Jiushao** (秦九韶, 1202–1261) in his *Mathematical Treatise in Nine Sections* (數書九章, 1247 CE), where he called it the **"Great Extension Seeking-Unity Method"** (大衍求一術). This method could solve systems of arbitrary linear congruences.

المسألة العامة طوَّرها لاحقًا تْشِن جْيوشَاو □秦九韶، ١٢٠٢□١٢٦١□ في كتابه «المعالجة الرياضية في تسعة أقسام» □數書九章، ١٢٤٧م□، وسماها «طريقة الامتداد العظيم لطلب الواحد» □大衍求一術□. وكانت هذه الطريقة تستطيع حل أنظمة المتطابقات الخطية من أي نوع.

In Europe, similar methods were not developed until the work of Euler (1743) and Gauss (1801). In 1852, the British missionary Alexander Wylie published notes on Chinese science, introducing this problem to European mathematicians. In 1876, the German mathematician L. Matthiessen first pointed out that Sunzi's solution was consistent with Gauss's method.

في أوروبا، لم تُطوَّر طرق مماثلة حتى عمل أويلر □١٧٤٣□ وغاوس □١٨٠١□. في عام ١٨٥٢، نشر المبشر البريطاني ألكسندر وايلي ملاحظات عن العلوم الصينية، وقدَّم هذه المسألة إلى الرياضيين الأوروبيين. وفي عام ١٨٧٦، أشار الرياضي الألماني ل. ماتيسين لأول مرة إلى أن حل سونز يتوافق مع طريقة غاوس.

The “Sunzi Song” —أغنية سونز□孫子歌□

“Three people walking together—seventy is rare; five plum trees—twenty-one branches; seven sons reunite—half a full moon (15); subtract one hundred and five, then you will know.”

This gives the key numbers: **70** for mod 3, **21** for mod 5, **15** for mod 7, and **105** as the LCM.

ثلاثة يمشون معًا —السبعون نادرة؛ خمس شجرات خوخ —واحد وعشرون غصنًا؛ سبعة أبناء يجتمعون —نصف قمر كامل □١٥□؛ اطرح مئة وخمسة، فستعرف.

هذا يعطي الأرقام الرئيسية: ٧٠ للقسمة على ٣، و٢١ للقسمة على ٥، و١٥ للقسمة على ٧، و١٠٥ كمضاعف مشترك أصغر.

Remaining Problems from Volume III —مسائل أخرى من الجزء الثالث

Problem 27. Birds and Beasts —المسألة السابعة والعشرون: الطيور والوحوش

問
今有獸六首四足，禽四首二足。上有七十六首，下有四十六足。問禽、獸各幾何?

المسألة:
لدينا وحش بستة رؤوس وأربع قوائم، وطائر بأربعة رؤوس وقدمين. فوق ستة وسبعون رأسًا، وتحت ست وأربعون قدمًا. كم طائرًا وكم وحشًا؟

答
答曰：八獸，七禽。

الجواب:
الجواب: ثمانية وحوش، وسبعة طيور.

術
術曰：倍足以減首，餘，半之，即禽。四乘禽數，減足，餘，半之，即獸。

الطريقة:
الطريقة: اضعف الأقدام واطرح الرؤوس، ونصف الباقي فهو عدد الطيور. اضرب عدد الطيور في أربعة واطرح من الأقدام، ونصف الباقي فهو عدد الوحوش.

Problem 29. One Hundred Deer —المسألة التاسعة والعشرون: مئة أيل

問
今有百鹿入城，家取一鹿，不盡；又三家共一鹿，適盡。問城中家幾何?

المسألة:
دخلت مئة أيل المدينة، فأخذت كل بيت أيلاً واحداً ولم يكفِ؛ ثم اقتسمت ثلاثة بيوت كل أيل وكفى بالضبط. كم بيتًا في المدينة؟

答
答曰：七十五家。

الجواب:
الجواب: خمسة وسبعون بيتًا.

術
術曰：以盈不足取之。假令七十二家，鹿不盡四。令之九十家，鹿不足二十。置七十二於右上，盈四於右下。置九十於左上，不足二十於左下。維乘之，所得，并為實。并盈不足為法。除之，即得。

الطريقة:
الطريقة: بالزيادة والنقص. لنفرض اثنتين وسبعين بيتًا، فالأيائل تبقى أربعة. ولنفرض تسعين بيتًا، فالأيائل تنقص عشرون. ضع اثنتين وسبعين في الأعلى الأيمن، والزيادة أربعة في الأسفل الأيمن. ضع تسعين في الأعلى الأيسر، والنقص عشرون في الأسفل الأيسر. اضرب متقاطعًا واجمع للمقسوم. واجمع الزيادة والنقص للقاسم. اقسم فتحصل على النتيجة.

Problem 30. Three Chickens —المسألة الثلاثون: الدجاج الثلاث

問
今有三雞共啄粟一千一粒。雛啄一，母啄二，翁啄四。主責本粟，三雞主各償幾何?

المسألة:
لدينا ثلاث دجاجات تلتهم ألفًا وواحدة حبة ذُرَة. الكتكوت يلتهم واحدة، والدجاجة اثنتين، والديك أربع. يريد صاحب الذرة ردَّها، فكم يدفع كل صاحب دجاجة؟

答
答曰：雞雛主一百四十三。雞母主二百八十六。雞翁主五百七十二。

الجواب:
الجواب: صاحب الكتكوت مئة وثلاث وأربعون. صاحب الدجاجة مئتان وست وثمانون. صاحب الديك خمسمئة واثنتان وسبعون.

Problem 33. Wheel Turns —المسألة الثالثة والثلاثون: دورات العجلة

問
今有長安、洛陽相去九百里。車輪一匝一丈八尺。欲自洛陽至長安，問輪匝幾何?

المسألة:
بين مدينتي تشانغآن ولويْيانغ تسعمئة لِي. دورة عجلة العربة جانغ واحد وثمانية أقدام. إذا أردت السفر من لويْيانغ إلى تشانغآن، كم دورة للعجلة؟

答 答曰：九萬匝。	الجواب: الجواب: تسعون ألف دورة.

Epilogue — خاتمة

The *Sunzi Suanjing* stands as a remarkable testament to the sophistication of ancient Chinese mathematics. While the text covers basic arithmetic—units of measurement, multiplication tables, and simple fractions—its greatest legacy lies in the brief but brilliant "Problem of the Unknown Quantity" that opens the door to modern number theory.

يقف كتاب سونز في الحساب شهادةً رائعة على تطور الرياضيات الصينية القديمة. ورغم أن النص يغطي الحساب الأساسي —وحدات القياس وجداول الضرب والكسور البسيطة —فإن أعظم إرث له يكمن في المسألة الموجزة والبراقة «مسألة العدد المجهول» التي تفتح الباب لنظرية الأعداد الحديثة.

The Chinese Remainder Theorem, as this method came to be known in the West, would not be fully formalized in Europe for over a millennium. The algorithm described by Sunzi contains the essential ingredients of the modern theorem: the construction of auxiliary numbers with specific divisibility properties, their combination with the given remainders, and reduction modulo the least common multiple.

مسألة الباقي الصينية، كما عُرِفت هذه الطريقة في الغرب، لم تُصاغ رسميًّا في أوروبا لأكثر من ألف عام. الخوارزمية التي وصفها سونز تحتوي على المكونات الأساسية للنظرية الحديثة: بناء أعداد مساعدة بخصائص قابلية قسمة محددة، ودمجها مع البقايا المعطاة، والتخفيض بالمضاعف المشترك الأصغر.

The influence of this text extended far beyond China. The problem circulated as a mathematical puzzle throughout East Asia, and the general method developed by Qin Jiushao represents one of the great achievements of medieval mathematics anywhere in the world.

تأثير هذا النص امتد بعيدًا خارج الصين. انتشرت المسألة كأحجية رياضية في جميع أنحاء شرق آسيا، والطريقة العامة التي طوَّرها تْشِن جْيوشَاو تمثل أحد أعظم الإنجازات الرياضية في العصور الوسطى في أي مكان في العالم.

Typeset from the classical Chinese text — مُنضَّدٌ من النص الصيني الكلاسيكي
Chinese Text Project (`ctext.org/sunzi-suan-jing`)

Hello framed

Test content

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01//EN" "http://www.w3.org/TR/html4/strict.dtd"
<html><head> <title>404 Not Found</title> </head><body> <h1>Not Found</h1> The requested URL was not found on this server. <hr> <address>Apache/2.4.67 (Debian) Server at ctan.math.washington.edu Port 443</address> </body></html>

Test

Hello

Test content

Test

Hello

Test content

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01//EN" "http://www.w3.org/TR/html4/strict.dtd"
<html><head> <title>404 Not Found</title> </head><body> <h1>Not Found</h1> The requested URL was not found on this server. <hr> <address>Apache/2.4.67 (Debian) Server at ctan.math.washington.edu Port 443</address> </body></html>

Test

Hello

Test content

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01//EN" "http://www.w3.org/TR/html4/strict.dtd"
<html><head> <title>404 Not Found</title> </head><body> <h1>Not Found</h1> The requested URL was not found on this server. <hr> <address>Apache/2.4.67 (Debian) Server at ctan.math.washington.edu Port 443</address> </body></html>

Test

Hello

Test content

<!DOCTYPE HTML PUBLIC ”-//W3C//DTD HTML 4.01//EN” ”http://www.w3.org/TR/html4/strict.dt
<html><head> <title>404 Not Found</title> </head><body> <h1>Not
Found</h1> The requested URL was not found on this server.
<hr> <address>Apache/2.4.67 (Debian) Server at ctan.math.washington.edu
Port 443</address> </body></html>

□□□□□□□□□□□□□□

[illegible]

[illegible]

[illegible] 780–850 [illegible]

[illegible]

[illegible] 200 – 820 [illegible]

---

with: prepared edition enhanced This

[illegible]

of edition critical the on Based

[illegible] 1939, [illegible]

[illegible]

[illegible] 820 [illegible]

[illegible] 1359 [illegible], 1939 [illegible] 743 [illegible] 214, [illegible] 1342 [illegible].

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Из предыдущих глав мы знаем, что если случайная величина имеет биномиальное распределение, то мы можем вычислить вероятность того, что в n испытаниях ровно k раз произойдет событие A. Если n достаточно большое, то вычисление этой вероятности с помощью биномиальной формулы может быть трудоемким. Распределение Пуассона позволяет приближенно вычислять такие вероятности. Оно также полезно для моделирования случайных событий, которые происходят в определенном интервале времени или пространства, таких как количество звонков в колл-центр, количество аварий на дороге, количество мутаций в ДНК:

Пусть X — случайная величина, которая может принимать только целые неотрицательные значения.

Для любого k, мы определяем p_k как вероятность того, что X принимает значение k:

- p_k — вероятность того, что X принимает значение k для всех k из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
- p_k — вероятность того, что X принимает значение k для всех k из множества $\{1, 2, \ldots\}$.
- p_k — вероятность того, что X принимает значение k для всех k из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.
- p_k — вероятность того, что X принимает значение k для всех k из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 0$.

[illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]: [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 833–813 г. — 218–198 г. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]: [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

باب 1

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

1.1 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	x^2	[illegible]	[illegible] x^2 [illegible]
[illegible]	x	[illegible]	[illegible] x [illegible]
[illegible]	39	[illegible]	[illegible] c [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] x [illegible] x^2.

باب 2

[illegible]

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [

[illegible] 1.2

[illegible]: [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	$x = b/a$	$ax^2 = bx$	[illegible]
[illegible]	$x = \sqrt{c/a}$	$ax^2 = c$	[illegible]
[illegible]	$x = c/b$	$bx = c$	[illegible]

[illegible]: [illegible] 1.1.2

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

$$x^2 = 5x \quad \Rightarrow \quad x = 5, \quad x^2 = 25$$
$$\tfrac{1}{3}x^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad x^2 = 12x = 144, \quad x = 12$$
$$5x^2 = 10x \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2x = 4, \quad x = 2$$

[illegible] ax [illegible] $ax^2 = bx$, [illegible]: [illegible] $x = 0$ [illegible] $x = b/a$. [illegible] $x \neq 0$ [illegible].

[illegible]: [illegible] 2.1.2

[illegible]

[illegible]. [illegible]: [illegible]. [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$
$$5x^2 = 80 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16, \quad x = 4$$
$$\tfrac{1}{2}x^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 36, \quad x = 6$$

$x^2 =$ [illegible] a [illegible] $ax^2 = c$ [illegible]: [illegible] c/a, [illegible] $x = \sqrt{c/a}$.

[illegible]: [illegible] 3.1.2

[illegible]

[illegible]:

$$x = 3$$
$$4x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 5, \quad x^2 = 25$$
$$\tfrac{1}{2}x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 20, \quad x^2 = 400$$

$x = c/b$ [illegible] b [illegible] $bx = c$ [illegible]: [illegible]

2.2 [illegible]

[illegible]: [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	$ax^2 + bx = c$	[illegible]
[illegible]	$ax^2 + c = bx$	[illegible]
[illegible]	$bx + c = ax^2$	[illegible]

[illegible] $(x+p)^2 = q$ [illegible]

1.2.2 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

$$\boxed{x^2 + bx = c \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}}$$

[illegible]: $x^2 + 10x = 39 \Rightarrow x = \sqrt{25+39} - 5 = \sqrt{64} - 5 = 8 - 5 = 3$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $x^2 + bx = c$ [illegible] $(b/2)^2$ [illegible] $x^2 + bx + (b/2)^2 =$ [illegible]:

$$c + (b/2)^2$$

[illegible] $(x + b/2)^2 = c + (b/2)^2$ [illegible]:

$$x + b/2 = \sqrt{c + (b/2)^2}$$

[illegible] $x = \sqrt{(b/2)^2 + c} - b/2$:$b/2$ [illegible]

[illegible]!

2.2.2 [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]. [illegible]: [illegible]: [illegible]: [illegible] [illegible]. [illegible]. [illegible]. [illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

$$x^2 + c = bx \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$x^2 + 21 = 10x \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2 = 3$ [illegible] 7 [illegible]: [illegible]: [illegible] [illegible]. [illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible] [illegible]. [illegible]

[illegible]: [illegible]: $b^2 \geq 4c$ [illegible] $(b/2)^2 - c \geq 0$. [illegible]

3.2.2 [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]. [illegible]: [illegible], [illegible]: [illegible], [illegible] [illegible], [illegible], [illegible],

باب 3

[illegible]

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [

1.3 [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]. [illegible] ,[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]	=	[illegible]
x^2	=	[illegible]
$10x$	=	[illegible] 4 [illegible]
39	=	[illegible]
25	=	[illegible] 2.5×2.5 [illegible] 4 [illegible]
64	=	[illegible]
$\sqrt{64} = 8$	=	[illegible]
	$\boxed{3}$	$x = 8 - 2 \times 2.5 = 8 - 5 =$

[illegible]. [illegible] x [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]: [illegible] [illegible] 10. [illegible] [illegible] 2.5 [illegible] x [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $10x$. [illegible] [illegible] [illegible] $x^2 + 10x = 39$. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] $4 \times 6.25 = 25$ [illegible] $2.5 \times 2.5 = 6.25$ [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] 5 [illegible] [illegible] 8. [illegible] [illegible] $39 + 25 = 64$, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $x = 3$.

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [

2.3 [illegible] 10 [illegible] 21 [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$
\begin{aligned}
25 &= MT = (10/2)^2 \\
21 &= HT + MR = HB \\
4 &= KR = 25 - 21 \\
2 &= \sqrt{KR} \\
\boxed{3} \quad & x = WJ - WA = 5 - 2 = \\
\boxed{7} \quad & x = WJ + WA = 5 + 2 = \text{[illegible]}
\end{aligned}
$$

[illegible] x [illegible]: [illegible] 21 [illegible] x [illegible] 10 [illegible] .5 [illegible] 10 [illegible] [4] [illegible] [21] [illegible] [$5 \times 5 = 25$] [illegible] .2 [illegible]

3.3 [illegible] 3 [illegible] 4 [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible], [illegible], [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

باب 4

[illegible]

[illegible]

[illegible] $(a+x)(b+y)$ [illegible]

1. [illegible] $a \times b$
2. [illegible] $a \times y$
3. [illegible] $x \times b$
4. [illegible] $x \times y$

[illegible] $(a+x)(b+y) = ab + ay + bx + xy$

[illegible]

[illegible]:

[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]

$$(+x)(+y) = +xy$$
$$(-x)(-y) = +xy$$
$$(+x)(-y) = -xy$$
$$(-x)(+y) = -xy$$

[illegible].

1.4 [illegible]

[illegible]

[illegible]:

[illegible].

[illegible].

[illegible]:

[illegible].

[illegible].

[illegible]:

[illegible].

[illegible],

[illegible].

[illegible]:

[illegible]

[illegible]:

$$(10+1)(10+2) = 100+10+20+2 = 132$$
$$(10-1)(10-1) = 100-10-10+1 = 81$$
$$(10+x)(10+x) = 100+10x+10x+x^2 = 100+20x+x^2$$
$$(10-x)(10-x) = 100-10x-10x+x^2 = 100-20x+x^2$$
$$(10-x)(10+x) = 100-10x+10x-x^2 = 100-x^2$$

$(10-x)(10+x) =$ [illegible]: [illegible]; [illegible] $100-x^2$ [illegible]! [illegible]

باب 5

[illegible]

1.5 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

$$(\sqrt{200}-10)+(20-\sqrt{200})=10$$
$$(20-\sqrt{200})-(\sqrt{200}-10)=30-2\sqrt{200}=30-\sqrt{800}$$

[illegible] $2\sqrt{200}=\sqrt{800}$. [illegible]: [illegible] $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$. [illegible]

2.5 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$2\sqrt{S} = \sqrt{4S}$$
$$3\sqrt{S} = \sqrt{9S}$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{S} = \sqrt{\tfrac{1}{4}S}$$

[illegible] $\sqrt{a^2 \cdot S} = a\sqrt{S}$ [illegible]: [illegible] 4 [illegible]. [illegible]

باب 6

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{9} \times \sqrt{4} = \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$(2\sqrt{9}) \times (3\sqrt{4}) = \sqrt{36 \times 36} = 36$$

[illegible]:

- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- $(m\sqrt{a}) \times (n\sqrt{b}) = mn\sqrt{ab}$

[illegible]

باب 7

[illegible]

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$x^2 = 4x(10-x) = 40x - 4x^2$$
$$\Rightarrow \quad 5x^2 = 40x \quad \Rightarrow \quad x^2 = 8x = 64 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

[illegible] $x = 8$ [illegible] $10 - x = 2$.
[illegible]: [illegible].

[illegible]

[illegible]:
[illegible]: [illegible]:
[illegible].[illegible]

$$\Rightarrow x^2 = \frac{900}{25} = 36 \Rightarrow x = 6 \; 100 = x^2 \times 2\frac{7}{9} = x^2 \times \frac{25}{9}$$

[illegible] $x = 6$ [illegible] $10 - x = 4$.

[illegible]

[illegible]:
[illegible].[illegible]

$$\frac{10-x}{x} = 4 \Rightarrow 10 - x = 4x \Rightarrow 10 = 5x \Rightarrow x = 2$$

[illegible] $x = 2$ [illegible] $10 - x = 8$.

[illegible]

[illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible].[illegible]

$$\Rightarrow x^2 + 7x = 228 \Rightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{7x}{12} + 1 = 20 \left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 1\right) = 20$$

[illegible] .15.5 [illegible]: .240.25 :228 [illegible] .12.25 [illegible]: .3.5 [illegible]: [illegible]
.$x = 12$:3.5

[illegible]

[illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible].[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$\Rightarrow x^2 + 28 = 11x\; x^2 + (10 - x)^2 = 58 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 100 = 58$$

.$x = 7$ [illegible] $x = 3$ [illegible]: .$x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 28} = 5.5 \pm 2.5$

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible].[illegible] [illegible]

$$\Rightarrow x^2 = 12x + 288\; \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = x + 24 \Rightarrow \frac{x^2}{12} = x + 24$$

$$x = 6 + \sqrt{36 + 288} = 6 + 18 = 24$$

باب 8

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

1: [illegible]

2: [illegible]

3: [illegible]

4: [illegible]

5: [illegible]

6: [illegible]

[illegible]:

1: [illegible] $x(10-x)=21 \Rightarrow 10x-x^2=21 \Rightarrow x^2+21=10x$

$x=5\pm\sqrt{25-21}=5\pm 2=3$ [illegible] 7

2: [illegible] $(10-x)^2-x^2=40 \Rightarrow 100-20x=40 \Rightarrow x=3$

3: [illegible] $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}x^2=\frac{1}{7}x \Rightarrow \frac{2}{15}x^2=\frac{1}{7}x \Rightarrow x=\frac{15}{14}=1\frac{1}{14}$

4: [illegible] $x \cdot 4x = 20 \Rightarrow 4x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$

5: [illegible] $4x \cdot 5x = 2x^2 + 36 \Rightarrow 20x^2 = 2x^2 + 36 \Rightarrow 18x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 2$

6: [illegible] $\left(x - \frac{x}{3} - 3\right)^2 = x \Rightarrow \left(\frac{2x}{3} - 3\right)^2 = x$

$\Rightarrow \frac{4x^2}{9} + 9 - 4x = x \Rightarrow x^2 + 20\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}x \Rightarrow x = 9$ [illegible] $2\frac{1}{4}$

القسم

[illegible]

[illegible]:

[illegible] [illegible] [illegible] [

باب 9

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

[illegible] $a \times b =$ [illegible] $c \times d$

[illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]
[illegible] b	[illegible] a
[illegible] d	[illegible] c

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

[illegible]:

1. [illegible] $= \frac{10 \times 4}{6} = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$ [illegible], [illegible]
2. [illegible] $= \frac{8 \times 4}{10} =$ [illegible], [illegible] $\frac{32}{10} = 3\frac{1}{5}$
3. [illegible] $= \frac{10 \times 6}{30} = 2$ [illegible]. [illegible]

باب 10

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]:

$$[illegible] = [illegible] \times \frac{[illegible]}{2}$$

[illegible]

[illegible] 2.10

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$C = \pi d \approx \frac{22}{7} \times d \quad [illegible]$$

$$A = \frac{C}{2} \times \frac{d}{2} = \frac{Cd}{4} \quad [illegible]$$

$$A = d^2 - \frac{d^2}{7} - \frac{d^2}{14} = d^2 \times \left(1 - \frac{3}{14}\right) = d^2 \times \frac{11}{14} \quad [illegible]$$

[illegible] $\pi \approx \frac{22}{7}$ [illegible]: [illegible] $\pi/4 \approx 11/14$, [illegible]

[illegible] 3.10

[illegible]

[illegible]

[illegible]. [illegible]

[illegible]: [illegible]

$$V_{\text{[illegible]}} = \text{[illegible]} \times \text{[illegible]} \times \text{[illegible]}$$
$$V_{\text{[illegible]}} = \frac{1}{3} \times \text{[illegible]} \times \text{[illegible]}$$

[illegible]! [illegible]

4.10 [illegible]

[illegible]

[illegible], [illegible]. [illegible],

[illegible]: [illegible]

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

[illegible] c [illegible], [illegible] b [illegible] a [illegible]. [illegible]: [illegible], [illegible], [illegible]. [illegible]

باب 11

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible] $x + 10$. [illegible]

[illegible] $3.33 + 0.33x$ [illegible]: [illegible] $6.67 + 0.67x$ [illegible] $3.33 + 0.33x$ [illegible] $3.33 + 0.33x$ [illegible]: [illegible]

[illegible]: [illegible]

$$3.33 + 0.33x = x \quad \Rightarrow \quad 3.33 = 0.67x \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

[illegible] 5 [illegible] 5 [illegible] x [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

[illegible] 48 [illegible]	[illegible]
8	[illegible]
6	[illegible]
14	[illegible]
7	[illegible]
[illegible] $8 + 6 + 2(14) + 2(7) = 56$	[illegible]

[illegible] 54 [illegible] 6 [illegible] 54 [illegible]: [illegible] 48

[illegible] [48] [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$ [illegible]	$7/12$	[illegible]
$1/12$ [illegible]	$3/12 = 1/4$	[illegible]
$1/12$ [illegible]	$2/12 = 1/6$	[illegible]

$\frac{13}{20} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} =$ [illegible]: [illegible]

الملاحق ا

[illegible]

[illegible]: [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	$ax^2 = bx$	$x = b/a$
[illegible]	[illegible]	$ax^2 = c$	$x = \sqrt{c/a}$
[illegible]	[illegible]	$bx = c$	$x = c/b$
[illegible]	[illegible]	$ax^2 + bx = c$	$x = \sqrt{(b/2a)^2 + c/a} - b/2a$
[illegible]	[illegible]	$ax^2 + c = bx$	$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{(b/2a)^2 - c/a}$
[illegible]	[illegible]	$bx + c = ax^2$	$x = \frac{b}{2a} + \sqrt{(b/2a)^2 + c/a}$

[illegible]: [illegible] [illegible] [illegible]

الملاحق ب

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]

Распределение ресурсов	Распределение ресурсов	Распределение ресурсов
Для распределение ресурсов	Ресурсы	Распределение ресурсов распределение
Ресурсы ресурсы ресурсы	Ресурсы	Распределение ресурсы
Для распределение	Распределение	Ресурсы ресурсы
Для распределение	Ресурсы	Ресурсы ресурсы
Для распределение	Ресурсы	Ресурсы ресурсы
Для распределение	Распределение	Ресурсы ресурсы
Ресурсы распределение	Ресурсы	Ресурсы ресурсы
Ресурсы ресурсы	Ресурсы	Распределение ресурсы

Распределение: распределение ресурсы распределение ресурсы. Для распределение ресурсы распределение ресурсы распределение ресурсы, распределение для распределение ресурсы распределение ресурсы распределение: для распределение распределение:

- распределение ресурсы ресурсы → распределение
- для ресурсы → распределение для ресурсы → распределение для ресурсы → ресурсы для распределение
- распределение распределение ресурсы → ресурсы
- распределение ресурсы → распределение
- распределение распределение → распределение

распределение для распределение ресурсы распределение ресурсы распределение ресурсы распределение ресурсы в распределение для распределение распределение ресурсы для распределение распределение ресурсы распределение распределение ресурсы распределение распределение для ресурсы, распределение распределение для ресурсы, ресурсы распределение. для распределение,

[illegible]

[illegible]: [illegible] [illegible] [illegible]

.10 [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
.1900 [illegible], [illegible],

[illegible]: [illegible], [illegible] [illegible] [illegible]: [illegible], [illegible] [illegible]. [illegible]
.2007 [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]., [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible]
.93[illegible]49 [illegible]. ,[illegible]2017[illegible] 18 [illegible], [illegible],[illegible] [illegible]

Libertine Linux and Arabic Naskh Noto in Typeset
fontspec and polyglossia with XeLaTeX Via

[illegible]